

# Bio-Ingeniería Computacional en el Estudio de la Hemodinámica y su Interacción con Arterias

Jesús Gerardo Valdés\*, Jorge Castro\*\* y Teodoro Córdova\*\*.

## RESUMEN

En este artículo se revisa la importancia del estudio de la hemodinámica como factor relevante en el diagnóstico de enfermedades vasculares. En primer lugar se presenta la forma de estudiar las arterias y la hemodinámica como un sistema físico, para lo cual se presentan las ecuaciones generales de gobierno del problema. A continuación se plantea la discretización de las ecuaciones generales para proceder a su solución mediante el método de los elementos finitos. Finalmente se presenta un método eficiente que permite hacer la interacción entre el flujo sanguíneo y las arterias. Se exponen diferentes casos estudiados utilizando las técnicas anteriormente descritas.

## ABSTRACT

This article deals with the importance of studying hemodynamics as an outstanding factor for prediction of vascular diseases. First the governing equations to study arteries and hemodynamics are given. Next discretization of the governing equations for its solution with the finite element method are exposed. Finally an efficient and robust algorithm to analyze the fluid-structure interaction of blood circulation in arteries is explained. Several example problems are presented showing the capabilities of the formulation presented.

Recibido: 15 de Junio de 2009  
Aceptado: 20 de Agosto de 2009

## INTRODUCCIÓN

El estudio mediante mecánica computacional de la hemodinámica y su interacción con las arterias resulta de gran importancia en el análisis del pulso arterial, aneurismas, estenosis e incluso el funcionamiento del *bypass* en pacientes con arterias atrofiadas. De hecho las propiedades mismas de la sangre como la presión, densidad, velocidad y el tipo de flujo son factores importantes a tomar en cuenta en el diagnóstico de diversas patologías.

La elasticidad de las arterias es una propiedad importante del sistema circulatorio, ya que la distensibilidad arterial puede acomodar instantáneamente la sangre expulsada por el corazón durante la sístole al mismo tiempo que manda hacia la circulación sistémica la sangre almacenada cuando el corazón está en condiciones de diástole, de manera que el flujo sanguíneo es continuo.

Gracias al avance de las computadoras y de la mecánica computacional, actualmente se está realizando mucha investigación con el fin de poder simular adecuadamente el flujo sanguíneo utilizando la dinámica de fluidos computacional que en inglés es *Computational Fluid Dynamics* y generalmente se encuentra referenciado por las siglas *CFD*. Por otro lado, el estudio de las arterias se lleva a cabo mediante la dinámica de sólidos computacional que proviene del vocablo en inglés *Computational Solid Dynamics* o simplemente por sus siglas *CSD*. Finalmente, la interacción entre ambas disciplinas de la mecánica es estudiada mediante problemas de interacción fluido-estructura, lo cual representa todo un reto debido a que se tienen que resolver conjuntamente tanto la rama de mecánica de sólidos como la rama de mecánica de fluidos.

### Palabras clave:

Hemodinámica; Elementos finitos; Dinámica de fluidos computacional; Interacción fluido-estructura

### Keywords:

Hemodynamics; Finite elements; Computational fluid dynamics; fluid-structure interaction

\* Departamento de Ingeniería Civil, División de Ingenierías, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato, Av. Juárez 77, C.P. 36000, Guanajuato, Gto., México. Correo electrónico: valdes@quijote.ugto.mx

\*\* Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías, Campus León, Universidad de Guanajuato, Loma del Bosque 103, C.P. 37150, León, Gto., México.

Desde la década de los 90's se comenzó a utilizar la dinámica de fluidos computacional en la simulación del flujo sanguíneo, pero debido al gran desafío que representaba un análisis tridimensional se optó por hacer una simplificación y utilizar análisis bidimensionales. Poco después algunos investigadores se adentraron en el estudio tridimensional de la hemodinámica, teniendo en ese momento muchos problemas con la capacidad de cálculo y almacenamiento de las computadoras. Aunado a esto, los problemas de generación de malla tridimensional no permitían hacer grandes avances, sino solamente simples simulaciones que validaban la dinámica de fluidos computacional en casos muy particulares.

Con el avance del tiempo y la posibilidad de contar con computadoras cada vez más potentes, se comenzó el estudio del flujo sanguíneo junto con la interacción sobre las arterias y venas. Esto representó para los investigadores un nuevo reto, ya que se tenían que fusionar dos mundos de la mecánica que siempre se habían considerado por separado y ahora tenía que resolver un problema común a ambos. Desde el punto de vista computacional, la solución del problema acoplado entre mecánica de fluidos y mecánica de sólidos se convirtió en un verdadero dolor de cabeza ya que la solución exacta entre ambos no era posible para aplicaciones hemodinámicas. Este problema se debe a que se tiene que resolver el problema acoplado teniendo en cuenta no solo dos partes, sino en realidad tres las cuales son: la dinámica de fluidos computacional, la dinámica de sólidos computacional y el gran reto de resolver la interacción entre ambos.

La solución de problemas de interacción se puede realizar de dos diferentes maneras: mediante *métodos monolíticos* o mediante *métodos particionados*. En el método monolítico se tienen que resolver al mismo tiempo las ecuaciones discretizadas del fluido, del sólido y las del movimiento de la malla del fluido, lo que genera un gran sistema no-lineal de ecuaciones que se tienen que resolver simultáneamente. Este método requiere de un gran coste computacional que solo puede ser solucionado con equipo de cómputo muy especializado.

La solución de problemas de interacción en dos dimensiones utilizando el método monolítico se puede encontrar en el trabajo Hübner y otros (2004).

En los métodos particionados, la forma de resolver el problema acoplado es completamente diferente, ya que para el caso de problemas de interacción fluido-estructura se tiene que resolver, para un instante de tiempo (ya que la totalidad del periodo de tiempo estudiado es dividido en un número definido de pequeños instantes de tiempo) solamente el problema de la di-

námica de fluidos, después se resuelve el problema de la dinámica de sólidos y finalmente se repite el proceso en el mismo instante de tiempo hasta que se llegue a obtener una tolerancia apropiada que nos indique que se ha resuelto satisfactoriamente la interacción entre ambos. El origen de los métodos particionados se debe al trabajo de Park y Felippa (1983), cuya descripción de manera más general se describe en Felippa y otros (1998). Los primeros problemas de interacción fluido-estructura con métodos particionados cuya teoría se puede aplicar a casos de hemodinámica se deben a Mok y Wall (2001), Mok (2001), y Tallec y Mouro (2001). Trabajos especializados desde el punto de vista de la mecánica computacional para resolver el problema de hemodinámica con interacción sobre las arterias se deben a Nobile (2001), Causin y otros (2005), Fernández y Moubachir (2005), Valdés (2007) y Jarvinen y otros (2008).

En este trabajo se modela el flujo sanguíneo junto con su interacción en las arterias haciendo uso de la simulación computacional junto con métodos numéricos avanzados. Para la parte de las arterias se utiliza un modelo de sólidos no-lineal, el cual recibirá las fuerzas que ocasiona el flujo sanguíneo. Este último se modela con fluidos incompresibles y finalmente se hace la interacción entre ambos.

De esta manera y mediante la utilización de las técnicas arriba mencionadas, el aporte de este trabajo consiste en demostrar que para que el pulso de presión (producido por el corazón) se pueda transmitir en el sistema circulatorio del cuerpo humano se necesita que las venas sean deformables, ya que en caso contrario cuando las venas son rígidas (en casos de avanzada edad o con mucho colesterol) el pulso de presión no se trasmite adecuadamente, resultado en un mayor esfuerzo por parte del corazón para que se complete el riego sanguíneo en todo el cuerpo. En los trabajos previos a este se encuentra las investigaciones de Nobile (2001), Causin y otros (2005), Fernández y Moubachir (2005), Valdés (2007), en donde se ha modelado con éxito la interacción fluido-estructura para problemas hemodinámicos con venas flexibles, faltando el caso particular de lo que sucede con venas rígidas. Cada una de las partes mencionadas se presenta a continuación.

## ARTERIAS

### Mecánica de la Pared Arterial

El sistema arterial sistémico cumple con dos funciones: primero distribuye la sangre expulsada por el ventrículo izquierdo a todo el organismo y segundo,

mantiene como continuo el flujo sanguíneo que es originalmente expulsado de manera intermitente.

El mantener el flujo continuo depende principalmente de las propiedades mecánicas de la arteria. Si las arterias se conservan elásticas, entonces éstas se expanden al paso del flujo sanguíneo, almacenando momentáneamente un volumen determinado del fluido y expulsándolo al recuperar la arteria su estado inicial, manteniendo así el flujo. Por otro lado, si las arterias se vuelven rígidas, la capacidad de almacenar fluido se ve disminuida, obligando así al corazón a bombear más rápido el flujo sanguíneo para mantenerlo continuo. Esto mantiene al paciente con una frecuencia cardíaca elevada y con presión alta, ya que el corazón también tiene que aumentar el volumen del flujo sanguíneo.

#### Ecuaciones de Gobierno

Las ecuaciones que se utilizan para resolver -desde el punto de vista mecánico- las venas y arterias provienen de las ecuaciones de la mecánica de medios continuos y en particular se hace uso de la ecuación de conservación de momento, la cual para el caso no-lineal geométrico se puede expresar de la siguiente manera

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i \quad (1)$$

A partir de la ecuación anterior se puede desarrollar la formulación Lagrangiana total, donde  $\rho_0$  es la densidad en configuración de referencia,  $v_i$  es la velocidad,  $P_{ji}$  es el tensor nominal de esfuerzos en configuración de referencia,  $X_j$  son las coordenadas materiales y  $b_i$  son las fuerzas másicas, tal como se puede encontrar en Malvern (1969). La ecuación (1) junto con apropiadas condiciones de contor-

no representa la solución exacta a cualquier problema de mecánica de sólidos -ya sea estático o dinámico- que esté en estudio. Sin embargo, la solución analítica para la gran mayoría de los casos es bastante laboriosa y prácticamente imposible.

Para poder usar la ecuación anterior en el estudio de arterias, se hace un planteamiento con elementos finitos, lo cual resulta en la conocida dinámica de sólidos computacional, cuyas ecuaciones se obtienen a partir de proponer una integración de la ecuación (1), la cual es multiplicada por una función de prueba, arrojando como resultado la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega_0} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta u_i \rho_0 b_i d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \delta u_i \bar{t}_i^0 d\Gamma_0 \quad (2)$$

donde la primer integral del lado izquierdo representa en trabajo interno y  $\delta E_{ij}$  es la variación del tensor de deformación de Green-Lagrange,  $S_{ij}$  es el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff y  $\Omega_0$  es el dominio de análisis de la arteria. La segunda integral del lado izquierdo representa el trabajo cinético o inercial donde  $\delta u_i$  es el vector de los desplazamientos virtuales y  $\ddot{u}_i$  es el vector de aceleración. El lado derecho de la ecuación (2) se denomina trabajo externo donde el término  $\bar{t}_i^0$  hace referencia a las fuerzas superficiales que actúan sobre la estructura. Más información de como se obtiene la ecuación (2) partiendo de la ecuación (1) se puede encontrar en Bonet y Wood (1997) y Belytschko y otros (2000).

#### Discretización con elementos finitos

La discretización de la ecuación (2) para el caso particular de elementos geoméricamente no-lineales de sólido da como resultado la siguiente ecuación:

$$\mathbf{f}^{int} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{ext} \quad (3)$$

donde las fuerzas internas  $\mathbf{f}_I^{int}$  para cada nodo  $I$  de la malla que conforman la discretización de la arteria con elementos finitos se obtiene a partir de

$$\mathbf{f}_I^{int} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_I^T \{\mathbf{S}\} d\Omega_0 \quad (4)$$

donde la matriz  $\mathbf{B}_I$  es conocida como matriz de deformación-desplazamiento y  $\{\mathbf{S}\}$  es el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff escrito en notación de Voigt. La matriz de deformación-desplazamiento se puede obtener como se indica en Zienkiewicz y Taylor (1989) y Belytschko y otros (2000).

La solución de la arteria se hace mediante el método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones con un esquema dinámico implícito donde se dedujo la matriz tangente para llegar a la solución mediante una convergencia cuadrática. La parte dinámica en casos de no linealidad produce soluciones espurias por lo que en este caso se recurrió al método Generalized- $\alpha$  para integrar las ecuaciones en el tiempo, introducido en Chung y Hulbert (1993) para minimizar dicha fuente de error.

## HEMODYNAMICA

### Conceptos básicos de hemodinámica

Dentro de la biomecánica se encuentra la hemodinámica, la cual tiene por objetivo el estudio del flujo sanguíneo, donde además de obtener las principales variables del flujo, como el campo de velocidades o la presión, también se modelan las fuerzas que generan dicho flujo.

Se parte de una situación física ideal en el que se considera el flujo sanguíneo como incompresible, es decir su densidad es constante en el tiempo. También se trabaja con un modelo de flujo newtoniano, aunque en algunos lugares del cuerpo humano el flujo sanguíneo se comporta como no-newtoniano. El sistema circulatorio está formado por dos tipos de circulación:

1. La circulación sistémica, que es la que parte del corazón —del ventrículo izquierdo— con sangre rica en oxígeno, va a través de las arterias, arteriolas y capilares llegando a todos los tejidos haciendo el suministro de oxígeno y nutrientes necesarios. Después regresa por las venas hasta el corazón, entrando en éste por la aurícula derecha.
2. La circulación pulmonar —que se encarga de eliminar los gases de desecho— parte del ventrículo derecho del corazón y lleva la sangre empobrecida de oxígeno a los pulmones, donde se realiza el intercambio gaseoso. Posteriormente la sangre, ya rica en oxígeno, vuelve al corazón entrando por la aurícula izquierda.

Recordemos también que por el teorema de Bernoulli al disminuir el área de la sección transversal tiene que aumentar la velocidad del fluido para que se pueda mantener constante el gasto cardiaco.

### Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de gobierno del problema que intervienen en la dinámica de fluidos y en particular en el flujo sanguíneo se derivan a partir de dos importantes ecuaciones de conservación, la ecuación de conservación de momentum y la ecuación de conservación de continuidad, que se expresan respectivamente por

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (5)$$

$$v_{i,i} = 0 \quad (6)$$

a partir de las cuales se desarrolla la formulación euleriana comúnmente usada en dinámica de fluidos, como se demuestra en Batchelor (2000) y Kundu y Cohen (2002). Las ecuaciones (5) y (6) junto con apropiadas condiciones de contorno dan lugar a la forma fuerte de fluidos. Al igual que para los sólidos, su solución analítica es prácticamente imposible, por lo que se hace el planteamiento en forma débil para dar lugar a

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d\Omega = 0 \quad (8)$$

que son mejor conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible, donde  $v_i$  es la velocidad,  $\rho$  es la densidad,  $p$  es la presión,  $\mu$  es la viscosidad,  $\delta v_i$  es la variación de la velocidad y  $\delta p$  es la variación de la presión. Como se puede ver, la ecuación (7) está expresada para resolver la condición de contorno homogénea de Dirichlet. Detalles para obtener las ecuaciones (7) y (8) discretizadas se pueden encontrar en Gunzburger (1989).

### Discretización con elementos finitos

La discretización con elementos finitos para fluidos da como resultado

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(\mathbf{v}) \mathbf{v} - \mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{f}^{ext} \quad (9)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{v} = 0 \quad (10)$$

donde  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}$  es el término de masa por aceleración,  $\mathbf{K}(\mathbf{v})$  es el término no-lineal que incluye la parte convectiva y viscosa, el cual está formado respectivamente por las siguientes ecuaciones

$$K^c = \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho N_I v^h \frac{\partial N_I}{\partial x_j} d\Omega \quad (11)$$

$$K^v = \delta_{ij} \mu \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega \quad (12)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\rho$  es la densidad en configuración actual y  $v^h$  es el campo aproximado de la velocidad cuyas componentes se obtienen a partir de

$$v_i^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} N_I v_{iI} \quad (13)$$

en la cual  $i = 1, 2, 3$  es cada una de las direcciones del espacio tridimensional y  $v_{iI}$  son las velocidades del nodo  $I$  sobre la malla de elementos finitos en su dirección correspondiente en el espacio tridimensional. En la ecuación (9),  $\mathbf{G}$  es el término que toma en cuenta la presión del fluido y se expresa por

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} N_I \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega \quad (14)$$

La solución conjunta de las ecuaciones (9) y (10) da como resultado la solución monolítica del fluido y tiene el problema que para el caso de problemas tridimensionales toma mucho tiempo de cómputo para llegar a la solución, por lo que en este trabajo se hace uso del método de los pasos fraccionados introducido por Chorin (1967) y Temam (1969) para diferencias finitas.

Como es bien sabido, la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes requieren de una técnica de estabilización por lo que en este trabajo se utilizó el método de la proyección de las escalas ortogonales introducido en Codina (2000) y Codina (2001). Otros métodos como el SUPG-PSPG o GLS no produjeron buenos resultados en los ejemplos de aplicación que se presentan más adelante. La solución de la parte no-lineal en el métodos de los pasos fraccionados se hizo con el método generalizado de Picard, en el cual se uso por primera vez la integración con el método Generalized- $\alpha$  para pasos fraccionados introducido por Valdés (2007).

Se utiliza además una solución dinámica implícita para los cuatro pasos del método. Para asegurar la convergencia de las iteraciones no-lineales se hace uso del método de Aitken, lo cual es nuevo en los métodos de pasos fraccionados para fluidos. Para la turbulencia se emplea el método de Smagorinsky (1963) que consiste en cambiar la viscosidad por una viscosidad

turbulenta artificial. La implementación general de la parte del fluido se validó con diferentes trabajos, entre los que destacan Codina (2001) y Ghia y otros (1982).

#### Interacción Hemodinámica y Arterias

En la mayoría de las simulaciones computacionales sobre bio-ingeniería se tiene en cuenta solamente el flujo sanguíneo, considerando como rígidas las arterias sobre las cuales circula el torrente sanguíneo. Aunque esto es de mucha ayuda, hay situaciones que hoy en día no se pueden explicar y por eso es que en la última década numerosas investigaciones se han realizado para tratar de hacer un estudio más completo teniendo en cuenta la hemodinámica y su interacción con las arterias.

Esto representa un gran desafío, ya que los investigadores generalmente se especializan en una de las dos ramas, ya sea la dinámica de fluidos o la dinámica de sólidos. Entonces el primer reto es abordar ambos temas y ser tan experto en sólidos como en fluidos. Una vez que se resuelve esta parte se podría suponer que ya está todo listo para efectuar análisis de interacción fluido-estructura. Sin embargo, la realidad es otra ya que el problema computacional apenas comienza. Desde el punto de vista de la implementación, resulta más fácil trabajar en dos códigos diferentes, uno especializado en fluidos y otro especializado en sólidos. De esta forma se procede a efectuar la interacción fluido-estructura de manera directa mediante la implementación de un sistema particionado.

Los esquemas particionados se pueden implementar de dos formas: la forma débil y la forma fuerte. La primera consiste en enviar los resultados del fluido para un dado instante de tiempo al sólido en el mismo instante de tiempo. Una vez que el sólido ha terminado, se avanza al siguiente paso de tiempo y se mandan los resultados del sólido al fluido para que empiece nuevamente el análisis por parte del fluido para ese nuevo instante de tiempo. Este tipo de análisis no cumple con ninguna tolerancia que dé por satisfactorios los resultados de la interacción fluido-estructura.

Un procedimiento que sí toma en cuenta la tolerancia existente del resultado de interacción fluido-estructura es el método particionado en forma fuerte. El procedimiento es prácticamente el mismo que para la forma débil con la diferencia de que el método en forma fuerte repite el procedimiento de cálculo en el mismo instante de tiempo hasta que la tolerancia de la interacción se cumpla. Esto asegura una convergencia en el cálculo, cosa que no sucedía para los esquemas de forma débil.

Los esquemas particionados en forma fuerte son excelentes para trabajar problemas de interacción fluido-estructura para el estudio de la aeroelasticidad ya que siempre se puede asegurar la convergencia en la interacción. Lamentablemente para el caso de la interacción entre la hemodinámica y las arterias el problema se complica debido a la aparición de un término de masa añadido. Esto se debe a que la densidad de la sangre y la densidad de las arterias es comparable, cosa que no sucede en el caso de la aeroelasticidad. Una forma de solucionar este problema es mediante el método de Aitken para la parte de la interacción, que aunque no es la solución óptima, al menos permite que la interacción converja y se pueda efectuar el análisis completo.

El procedimiento resultante es el siguiente. La solución consiste en encontrar las velocidades y presiones que la hemodinámica genera sobre las arterias mediante el solver de la dinámica de fluidos computacional (CFD). El resultado anterior es transferido al solver de la dinámica de sólidos computacional (CSD) lo que genera desplazamientos como variables principales. Estos desplazamientos hacen que el dominio del fluido cambie, por lo que los desplazamientos del sólido deben ser transmitidos a la parte del fluido, donde se tiene que mover todo el dominio del fluido para que se adapte al nuevo contorno de las arterias. Este paso se hace mediante la dinámica de la malla de elementos finitos computacional (CMD). A continuación de repite el proceso y se vuelven a calcular las variables principales del fluido que son la velocidad y las presiones, donde en vez de utilizar una formulación euleriana se utiliza una formulación ALE para tomar en cuenta el movimiento del fluido cada vez que el sólido se deforma.

En este trabajo el movimiento de la malla de elementos finitos en la parte del fluido puede hacerse con dos métodos, el primero y más sencillo es el método del Laplaciano, como se indica en Belytschko y otros (2000). El segundo método es más robusto pero más caro computacionalmente y se basa en la solución de un sistema pseudo-estructural, como se explica en Chiandussi y otros (2000). Para la parte del acoplamiento se usa un esquema fuerte como se detalla en Wall y Ramm (1998) y Wall (1999). Además para asegurar la convergencia se utilizó el método de Aitken. Un trabajo completo donde se encuentra detallada la parte de la dinámica de sólidos, dinámica de fluidos y la parte de interacción partiendo desde sus ecuaciones básicas se encuentra en Valdés (2007).

## EJEMPLOS

### Interacción Hemodinámica y Arteria Flexible

En este ejemplo se trata de reproducir el efecto que existe sobre las arterias cuando el paso de la hemodinámica responde al aumento repentino de presión ejercida por el corazón. Hay que destacar que se están considerando arterias flexibles, es decir, que cuando se presenta un aumento de presión en una determinada zona de la arteria ésta es capaz de deformarse, y cuando se acaba ese impulso de presión la arteria se recupera para regresar a su forma original.

El objetivo que se persigue con este ejemplo es poder demostrar que en la realidad para que el flujo se transmita como un pulso sobre la arteria, esta debe de ser flexible.

Para poder validar el trabajo, se ha tomado tanto la geometría como los datos de las investigaciones realizadas por Nobile (2001), Formaggia y otros (2001) y Fernandez y Moubachir (2005). La geometría usada se construye en base a un cilindro de diámetro  $r_o = 0.5$  cm. y longitud  $L = 5.0$  cm. Los parámetros de flujo sanguíneo vienen dados por las investigaciones de Formaggia y otros (2001) con una densidad  $\rho^f = 1$  g/cm<sup>3</sup> y una viscosidad  $\mu = 0.03$  g/(cm s<sup>2</sup>). Los parámetros de la arteria que circunda el flujo sanguíneo tienen una densidad  $\rho^s = 1.2$  g/cm<sup>3</sup>, módulo de Young  $E = 3.0 \times 10^6$  g/(cm s<sup>2</sup>), coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  y un espesor de 0.1 cm.

Para el flujo sanguíneo se utilizan elementos finitos con las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, mientras que para las arterias se usan elementos finitos con la ecuación de Cauchy en su forma no-lineal Lagrangiana Total.

Para la estructura se ha supuesto que tanto la entrada como la salida están empotradas. Se considera que el fluido está inicialmente en reposo y repentinamente se le impone una presión de  $1.3332 \times 10^4$  g/(cm s<sup>2</sup>), la cual equivale tan sólo a una presión de 10 mmHg. Esta presión se mantiene por un instante de tiempo de 0.003 s. Después de ese tiempo, la presión se retira y se estudia el efecto que existe sobre la arteria en un intervalo de tiempo de 0.01 s. Hay que destacar que tanto la presión como el intervalo de tiempo no son los que existen realmente en el flujo sanguíneo de una persona, sin embargo lo que se trata de mostrar es que la formulación es lo suficientemente robusta para tratar con problemas de este tipo, así como demostrar en general la importancia de la flexibilidad en las arterias para que se complete el ciclo del flujo sanguíneo.

Como se puede ver en las figuras 1-4, la presión máxima provoca una deformación sobre la arteria, al mismo tiempo que origina un cambio de posición de la presión a lo largo de toda la longitud arterial conforme va avanzando el pulso en el tiempo. Esto nos hace suponer que el pulso del corazón es transmitido a lo largo de las arterias, haciendo que la deformación de estas últimas contribuya en cierta medida al flujo sanguíneo. En las figuras 1-4 se ha ampliado su deformada por un factor de 20 para poder apreciar fácilmente como se deforma la arteria al paso del pulso de presión.

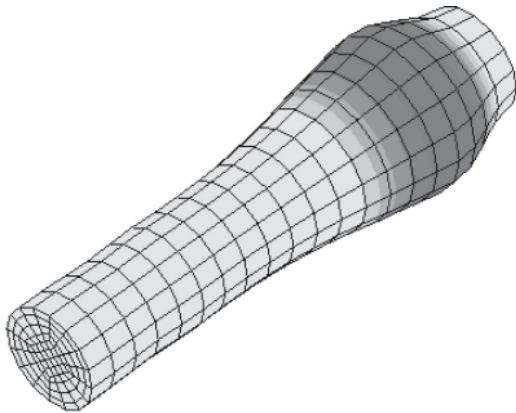


Figura 1. Localización del impulso de presión en el instante de tiempo 1 para arteria flexible

En la figura 1 se muestra la presión justo en el último momento antes de retirarla, es decir, cuando el paso de tiempo es igual a 0.003 s. En las figuras siguientes se muestra como tras quitar el pulso de presión, éste se transmite a lo largo de toda la arteria. Hay que resaltar que el valor de la presión que se transmite corresponde al valor de  $1.3332 \times 10^4$  g/(cm

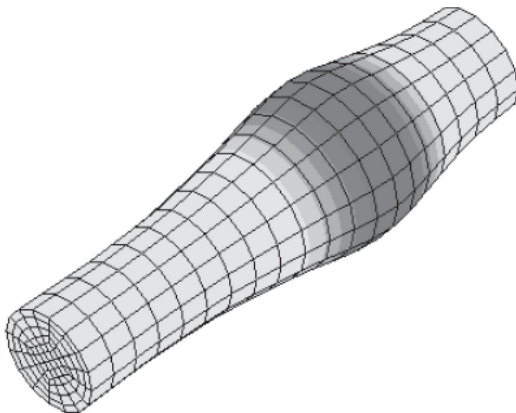


Figura 2. Localización del impulso de presión en el instante de tiempo 2 para arteria flexible

$s^2$ ), que es el valor de entrada de la presión. En el extremo de salida la presión es cero, por lo que se reduce dicho valor en este punto.

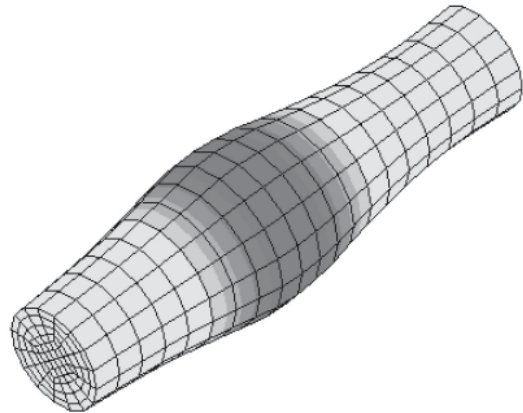


Figura 3. Localización del impulso de presión en el instante de tiempo 3 para arteria flexible

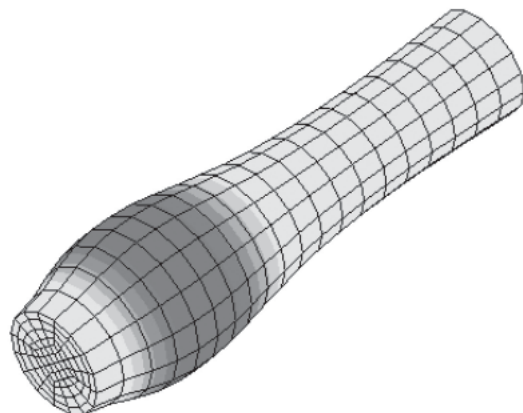


Figura 4. Localización del impulso de presión en el instante de tiempo 4 para arteria flexible

#### Interacción Hemodinámica y Arteria Rígida

En esta parte se presenta el estudio del flujo sanguíneo con una arteria rígida considerando que tiene idéntica geometría y propiedades que el ejemplo anterior. De esta forma se puede hacer el estudio del flujo con una formulación euleriana, ya que al no deformarse la arteria cuando actúa sobre ella el pulso sanguíneo, entonces el dominio del fluido no cambia.

En la figura 5 se puede observar una similitud de distribución de presión al que aparece en la figura 1 cuando

el valor de la presión está actuando. La única diferencia es que la arteria en este caso no se está deformando.

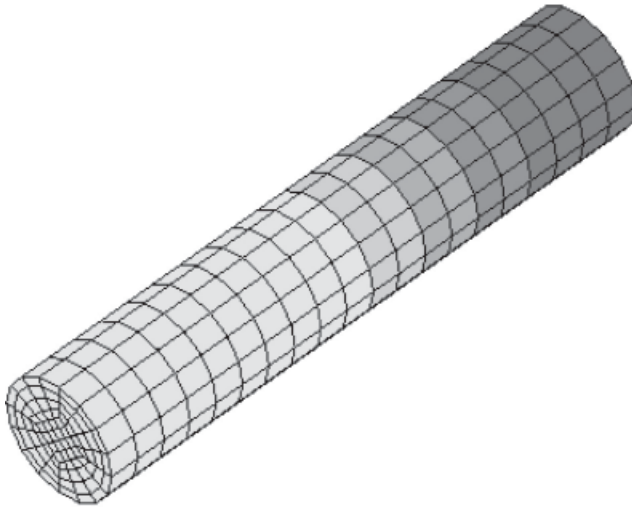


Figura 5. Localización del impulso de presión en el instante de tiempo 1 para arteria rígida.

En la figura 6 se puede ver que al retirar el valor de la presión después de los 0.003 s., ésta desaparece repentinamente. En realidad lo que está sucediendo es que la presión después de retirarla no se transmite como sucede cuando la arteria es flexible, y su valor empieza a generar oscilaciones de presión tendiendo a cero conforme se avanza en el tiempo.

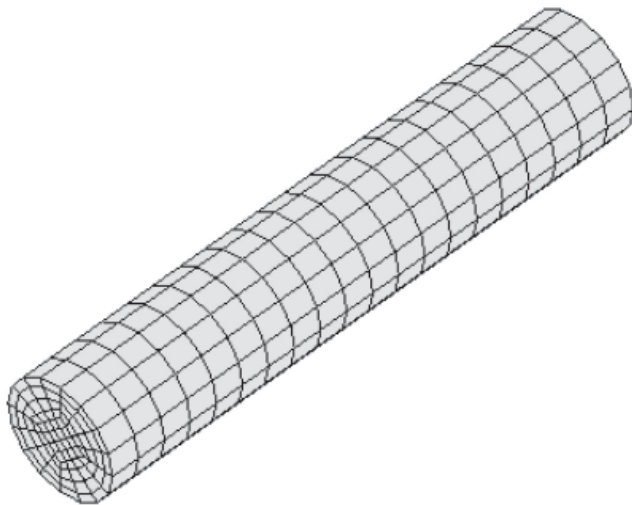


Figura 6. Localización del impulso de presión en el instante de tiempo 2-4 para arteria rígida.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se puede ver como utilizando la mecánica computacional para resolver las ecuaciones generales de la física e ingeniería, se pueden crear aplicaciones para el estudio del flujo sanguíneo y su interacción con las arterias. En particular se demostró como al aplicar una presión por un breve instante de tiempo sobre una arteria, se pueden encontrar dos resultados sumamente diferentes.

El primero es cuando se toma en cuenta la posible deformación que puedan tener las arterias ocasionada por la presión. Esto nos da como resultado el hecho de que ese pulso de presión se transmite a lo largo de toda la arteria ocasionando el flujo sanguíneo sobre la misma. El segundo es cuando la arteria se considera rígida, ocasionando que la presión no se propague y consecuentemente con el tiempo no habrá más flujo sanguíneo.

Estos resultados tan interesantes lo único que demuestran es que una persona sana debe tener sus arterias flexibles para que de esta manera el trabajo que hace el corazón para enviar el flujo al torrente sanguíneo sea el mínimo necesario para mantener el sistema funcionando. En cambio, a medida que las arterias se rigidizan, se tiene que hacer un mayor esfuerzo por parte de corazón para bombear la sangre dentro cuerpo y se irrigue en todo el cuerpo.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato (CONCYTEG) por el apoyo brindado para la realización del proyecto *Aplicaciones de Interacción Fluido-Estructura Mediante Mecánica Computacional*, así como a la Universidad de Guanajuato por el tiempo proporcionado para el desarrollo de dicho proyecto.

## REFERENCIAS

- Batchelor, G. K. (2000). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, cambridge mathematical library 1ra. edición.
- Belytschko, Ted; Liu, Wing Kam y Moran, Brian (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, Chichester.
- Bonet, Javier y Wood, Richard D. (1997). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. University Press, Cambridge.
- Causin, P., Gerbeau, J. F. y Nobile, F. (2005). Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp. 4506–4527.
- Chiandussi, G., Bugeda, Gabriel y Oñate, Eugenio (2000). A simple method for automatic update of finite element meshes. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16, pp. 1–19.



- Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous problems. *Journal of Computational Physics*, 2, pp. 12–26.
- Chung, J. y Hulbert, G. M. (1993). A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- method. *Journal of Applied Mechanics*, 60, pp. 371–375.
- Codina, Ramón (2000). Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 1579–1599.
- Codina, Ramón (2001). Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 170, pp. 112–140.
- Felippa, Carlos A., Park, K. C. y Farhat, C. (1998). Partitioned Analysis of Coupled Systems. En: Eugenio Oñate y Sergio Idelsohn (Eds.), *IV World Congress on Computational Mechanics*, CIMNE, Barcelona.
- Fernández, Miguel Angel y Moubachir, Marwan (2005). A Newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling. *Computers and Structures*, 83, pp. 127–142.
- Formaggia, L., Gerbeau, J. F., Nobile, F. y Quarteroni, A. (2001). On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp. 561–582.
- Ghia, U., Ghia, K. N. y Shin, C. T. (1982). High-re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes Equations and the Multigrid Method. *Journal of Computational Physics*, 48, pp. 387–411.
- Gunzburger, Max D. (1989). *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flow*. Academic Press, San Diego.
- Hübner, Björn, Walhorn, Elmar y Dinkler, Dieter (2004). A monolithic approach to fluidstructure interaction using space-time finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp. 2087–2104.
- Jarvinen, Esko, Raback, Peter, Lyly, Mikko y Salenius, Juha-Pekka (2008). A method for partitioned fluid-structure interaction computation of flow in arteries. *Medical Engineering & Physics*, 30, pp. 917–923.
- Kundu, Pijush K. y Cohen, Ira M. (2002). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Malvern, Lawrence E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Mok, D. P. y Wall, W. A. (2001). Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures. En: W. A. Wal, K. U. Bletzinger y K. Schweizerhof (Eds.), *Trends in Computational Structural Mechanics*, pp. 689–698. CIMNE, Barcelona.
- Mok, Daniel Pinyen (2001). *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Tesis doctoral, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Nobile, Fabio (2001). *Numerical Approximation of Fluid-Structure Interaction Problems with Application to Haemo-dynamics*. Tesis doctoral, Département de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Laussane.
- Park, K. C. y Felippa, Carlos A. (1983). Partitioned analysis of coupled systems. En: Ted Belytschko y T. J. R. Hughes (Eds.), *Computational Methods for Transient Analysis*, pp. 157–219. Elsevier Science Publishers.
- Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations, part I, the basic experiment. *Mon. Wea. Rev.*, 93, p. 99.
- Taltec, P.L. y Mouro, J. (2001). Fluid-structure interaction with large structural displacements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 3039–3067.
- Temam, R. (1969). Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I). *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 32, pp. 135–153.
- Valdés, Jesus Gerardo (2007). *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures Including Fluid-Structure Interaction*. Tesis doctoral, Technical University of Catalunya, <http://www.tdcat.cesca.es/TDX-1126107-193535>.
- Wall, Wolfgang A. (1999). *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Tesis doctoral, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Wall, Wolfgang A. y Ramm, Ekkerhard (1998). Fluid-Structure Interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. En: Eugenio Oñate y Sergio Idelsohn (Eds.), *IV World Congress on Computational Mechanics*, CIMNE, Barcelona.
- Zienkiewicz, O. C. y Taylor, Robert L. (1989). *The Finite Element Method*. Volumen 1 and 2. McGraw-Hill, London, 4ta. edición.