

Oscilaciones de un sistema dinámico no lineal analizando sus bifurcaciones

José Francisco Gómez Aguilar*, Lorena Guadalupe González Juárez**, J. Juan Rosales García*** y Manuel Guía Calderón***

RESUMEN

En este trabajo se analizan las oscilaciones de un sistema eléctrico de potencia acoplado con un horno de arco eléctrico. Se presentan los diagramas de bifurcación y la estabilidad de los puntos de equilibrio. Los puntos críticos de estabilidad y las zonas de operación se analizan en el estado oscilatorio, se obtiene que en el voltaje interno del generador sincrónico se presenta el parámetro de bifurcación.

ABSTRACT

In this paper the oscillations of an electrical power system coupled to an electric arc furnace are analyzed. Bifurcation diagrams and the stability of the equilibrium points are presented. The critical stability points and the operating zones are analyzed in the oscillatory state, and it is found that the internal voltage of the synchronous generator shows the bifurcation parameter.

Recibido: 2 de Marzo de 2010
Aceptado: 25 de Mayo de 2010

INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico se puede modelar por un conjunto de ecuaciones diferenciales, en diferencias, integrales ó integro diferenciales, las cuales proporcionan la existencia de una solución única para cada conjunto de condiciones iniciales. A diferencia de los sistemas dinámicos lineales, la mayoría de los sistemas no lineales se caracterizan por no tener soluciones analíticas, debido a la complejidad y la no linealidad de las ecuaciones. En general, los sistemas no lineales tienen un comportamiento complejo que en ocasiones puede llegar a ser caótico, la clave está en entender la noción de la no linealidad. La no linealidad se puede entender caracterizando el comportamiento de un sistema en términos del estímulo y de su respuesta, Hilborn (1994).

Entre las diversas teorías de análisis matemático aplicadas a la dinámica no lineal, el método de bifurcaciones ha demostrado ser el más útil para determinar de manera cualitativa los puntos de equilibrio y las inestabilidades que toman lugar en la dinámica de los sistemas no lineales. Los cambios cualitativos que ocurren en un sistema y que son producidos por pequeñas variaciones en los parámetros de éste se denominan bifurcaciones. Los valores de los parámetros donde estos cambios ocurren son llamados puntos de bifurcación, Strogatz (2000).

En los sistemas eléctricos de potencia, algunas aplicaciones de la teoría de bifurcaciones se han realizado sobre el fenómeno de colapso de voltaje, Dobson (1989), oscilaciones caóticas, Wang (1994), diseño de controladores no lineales, Lee (2001), estabilizadores de sistemas de potencia, Mithulananthan (2003) y compensadores estáticos de Vars, García-Kasusky (2003). Medina y García (1999) emplearon el modelo del horno de arco eléctrico en el dominio del tiempo interactuando con elementos de una red eléctrica. En él se emplea el método de Newton Raphson para acelerar la convergencia de las variables de estado del sistema a los ciclos límites.

Palabras clave:
Dinámica no lineal; Bifurcaciones; Estado oscilatorio; Estabilidad; Puntos críticos.

Keywords:
Non linear dynamics, Bifurcation, Oscillatory state, Stability, Critical points.

Recientemente, Medina y Gómez (2005) analizaron la estabilidad del horno de arco eléctrico de corriente alterna interactuando con su sistema de alimentación. En este trabajo se consideró el horno de arco eléctrico conectado a un bus infinito, sin la posibilidad de ver el efecto de la variación de excitación de los generadores sobre el comportamiento dinámico del horno de arco.

* Departamento de Ingeniería Física, División de Ciencias e Ingenierías, Campus León, Universidad de Guanajuato. C.P. 37150, León Gto., México. Correo electrónico: jfga@fisica.ugto.mx

** Departamento de Ingeniería Eléctrica, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid. Madrid España.

*** Departamento de Ingeniería Eléctrica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato. Carretera Salamanca-Valle de Santiago km 3.5+1.8 km. Comunidad de Palo Blanco. Tel. (464) 647 99 40. Fax 2311.

En el presente trabajo se sustituye el bus infinito por un generador síncrono conectado a un horno de arco eléctrico, con el fin de ver el efecto sobre el comportamiento dinámico del horno causado al variar la excitación del generador.

Modelo matemático.

La Figura 1, muestra la estructura típica desarrollada para el sistema de alimentación energética de un horno de arco eléctrico, Acha (1990). Con el propósito de obtener un modelo matemático cercano a la realidad se incluyó en este análisis el generador síncrono, la línea de transmisión, el banco de capacitores, el transformador del horno de arco y el horno de arco eléctrico. Los componentes que conforman el sistema son:

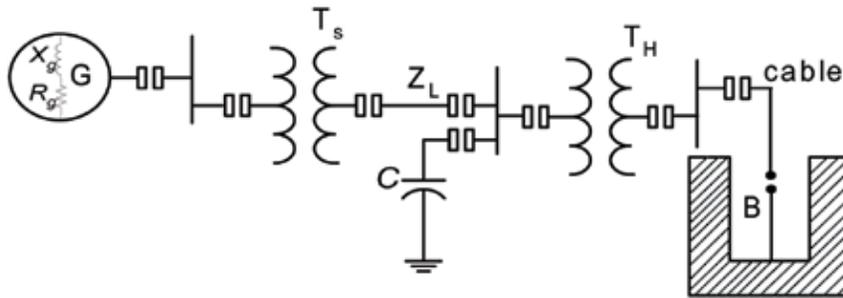


Figura 1. Sistema de alimentación del horno de arco eléctrico, Acha (1990).

- **Generador síncrono G:** Proporciona la potencia eléctrica que demanda el horno de arco. Este elemento es acoplado al lado primario del transformador elevador T_s , al lado secundario se conecta la línea de transmisión y a su vez un bus al banco de capacitores y al horno.

- **Sistema de transmisión:** Integrado por el transformador de la subestación T_s , los buses y líneas del sistema expresadas como Z_L .

- **Banco de capacitores C:** Estos filtros tienen el propósito de compensar la potencia reactiva de la línea de transmisión. Generalmente, se instalan en el punto de conexión del bus de carga.

- **Transformador del horno de arco T_H :** Permite elevar el voltaje del bus de carga al demandado por la operación del horno de arco. En él se incluyen los cables flexibles de alimentación, el devanado del transformador del horno y los electrodos del arco eléctrico B.

Los generadores síncronos juegan un papel muy importante en la estabilidad de los sistemas de potencia, debido a que son la principal fuente de energía eléctrica. En este modelo se presenta el comportamiento de un generador alimentando una carga con las siguientes consideraciones:

- La resistencia de campo r_g y su corriente de campo i_f son constantes y por lo tanto, el flujo de campo ψ_f también es constante.

- La turbina mantiene una velocidad angular constante ω , frecuencia constante f y por consiguiente, la magnitud del voltaje generado E_i es constante.

- El generador opera con factor de potencia en atraso al igual que la carga que alimenta, esto debido al transformador y la línea de transmisión. Así, la corriente de carga aumenta en magnitud, mientras que el ángulo de desplazamiento θ mantiene igual con respecto al voltaje de fase.

La ecuación que describe el comportamiento dinámico del voltaje en las terminales del generador está expresada por la siguiente ecuación, Chapman (2000).

$$V_g = \frac{PX_g}{E_i \sin(\delta)}, \quad (1)$$

Donde P es la potencia media que demanda el horno de arco y X_g la reactancia inductiva del devanado del generador (mayor que cero). En la ecuación (1) se despreció la resistencia del devanado del generador r_g , debido a que su valor es muy pequeño en comparación con su reactancia, E_i expresa el voltaje generado por el campo y δ representa el ángulo que existe entre el voltaje en terminales de la máquina V_g y el voltaje generado, E_i los valores de estos voltajes están dados en rms.

Aplicando el principio de conservación de la energía, Acha (1990) obtuvo la dinámica general del horno de arco en forma de ecuación diferencial:

$$k_1 r^n + k_2 r \frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{r^{m+2}} i_h^2, \quad (2)$$

En esta ecuación el radio r del arco eléctrico aparece como única variable de estado. El efecto del medio ambiente en la ecuación (2) queda expresado en función de la variable n , la cual toma los valores de acuerdo a:

- $n = 0$, cuando el medio ambiente está caliente y el enfriamiento del arco no depende del radio del arco eléctrico.

- $n = 1$, indica que el ambiente alrededor del arco es caliente y por lo tanto la temperatura depende de su longitud de arco.

- $n = 2$, si la longitud del arco es corta, entonces su área de enfriamiento es proporcional a su sección transversal en los electrodos.

El último término de la ecuación (2) muestra que la resistividad de la columna del arco es inversamente proporcional a r^m . El parámetro m está relacionado con el efecto de la temperatura en el arco. Sus valores son dados de modo que:

- $m = 0$, la longitud del arco es grande y la temperatura del arco es menos caliente.

- $m = 1$, la longitud del arco es media y su temperatura será media.

- $m = 2$, la longitud del arco es pequeña y la temperatura alta.

Las constantes k_1 , k_2 y k_3 en la ecuación (2) representan el efecto de enfriamiento del arco y están relacionadas con la proporción obtenida de la energía interna del arco y la proporción resistiva de la columna del arco, respectivamente. Éstas tienen un efecto directo en la convergencia de la estabilidad del sistema y son determinantes en la operación nominal del horno de arco eléctrico.

En la Figura 2 se muestra el circuito eléctrico monofásico. En él la variable V_g , corresponde al voltaje en la terminal del generador. El conjunto de parámetros R_g , X_g representan la resistencia (despreciada por ser tan pequeña comparada con la reactancia) y la reactancia inductiva del devanado del generador síncrono. La corriente de carga por fase que entrega el gene-

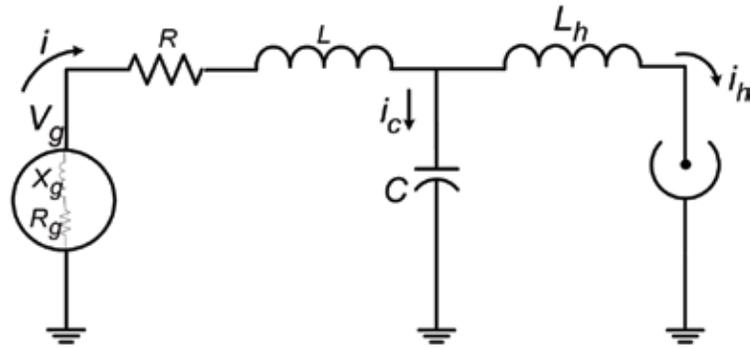


Figura 2. Diagrama monofásico correspondiente al caso de estudio.

rador al sistema está expresada por medio de la variable i . Los parámetros R , L , representan la resistencia y la inductancia propia del sistema de potencia integrado por la línea de transmisión y el transformador de la subestación. El parámetro C , representa al capacitor que está en paralelo con el horno de arco eléctrico, mientras que el parámetro L_h , expresa la inductancia equivalente a la reactancia del cable flexible de conexión, la inductancia del transformador del horno de arco y los electrodos. La corriente que demanda el horno de arco está definida por medio de la variable i_h (la variable i_h está involucrada en la ecuación 2). Por último, la corriente que alimenta al capacitor está expresada por la variable i_c .

Con la finalidad de obtener un modelo matemático que describa al sistema mostrado en la Figura 2, la ecuación del horno de arco eléctrico modelado en la ecuación (2) se acopla con las ecuaciones que representan a la red. Aplicando las leyes de Kirchhoff de corriente y voltaje en los nodos y mallas de la Figura 2 se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} \dot{i} \end{pmatrix} = (L)^{-1} \left[\frac{PX_g}{E_i \text{sen}(\delta)} - Ri - V_c \right] \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_c \end{pmatrix} = (C)^{-1} [i - i_h] \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_h \end{pmatrix} = (L_h)^{-1} [V_c - k_3 i_h r^{-(m+2)}] \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \end{pmatrix} = \frac{k_3}{k_2} r^{-(m+3)} i_h^2 - \frac{k_1}{k_2} r^{(n-1)} \quad (6)$$

donde $\dot{i}, \dot{V}_c, \dot{i}_h, \dot{r}$ representan derivadas respecto al tiempo.

SOFTWARE EMPLEADO.

El "software" que se utilizó para realizar las simulaciones es el paquete XPPAUTO50®, Doedel (1986), que cuenta con dos interfaces acopladas y dependientes entre ellas, XPP y AUTO. Este programa es muy flexible, ya que a través de cualquier editor de texto se puede generar una

ecuación diferencial en una sintaxis simple propia de XPPAUTO50®, indicando las variables de estado con sus valores iniciales y parámetros con sus intervalos de variación. El programa resuelve las ecuaciones en forma numérica, proporcionándole los valores iniciales el programa linealiza alrededor del punto de equilibrio. Una vez obtenida la linealización, se varía el punto de equilibrio para observar el comportamiento de los parámetros de interés.

COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

Estado transitorio

Se presenta cuando se inicia la operación de un sistema dinámico, generalmente su duración es de periodos cortos. Los valores de los parámetros asociados al sistema de ecuaciones diferenciales (3), (4), (5) y (6) en *pu* (por unidad), empleados en el análisis están dados en la Tabla 1. Los parámetros k_1 , k_2 y k_3 fueron tomados de Medina y García (1999), los valores de m , n están dados en Acha (1990). Los valores iniciales de L , C , L_h y R fueron tomados de Medina y Gómez (2005), donde se obtuvieron las bifurcaciones de la inductancia y capacitancia tomando el voltaje del generador igual a 1 *pu*.

Tabla 1.
Condiciones iniciales de los parámetros del sistema dinámico en *pu*.

Parámetros	Valores Iniciales en <i>pu</i>	Parámetros	Valores Iniciales en <i>pu</i>
L	0.1	L_h	0.1
C	0.1	R	0.1
m	1	N	2
E_i	0.4121	δ	0.3991
X_g	0.1587	k_2	0.005
k_1	0.008	k_3	3

En el presente trabajo los valores de E_i , δ , X_g fueron obtenidos de una rutina que se realizó en el "software" MATLAB® con la finalidad de ajustar el voltaje del generador a 1 *pu*. Las condiciones iniciales de las variables de estado son cero, el método de integración es Runge-Kutta con un paso de integración igual a $dt = 0.001$, (se revisaron otros pasos de integración, y los resultados fueron los mismos). El método converge en 5 500 iteraciones y el error es menor a 0.000001. El número de cifras significativas que utiliza el software para las iteraciones es de 9.

Con estos valores iniciales se observan los comportamientos en las variables, mostrando como ejemplo la Figura 3, en la cual se muestra el valor de los

parámetros en magnitudes rms que corresponden al punto de equilibrio estable, en los cuales se refleja la evolución del estado transitorio en el tiempo hasta que eventualmente llega al estado estacionario, lo que se logra en un tiempo cercano a los 25 segundos.

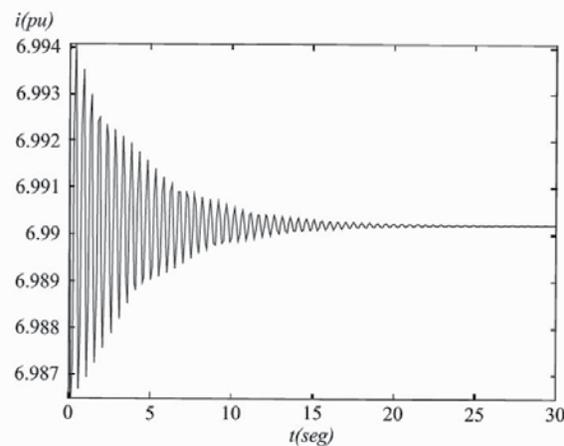


Figura 3. Comportamiento de la corriente en estado transitorio, después de 25 segundos alcanza la estabilidad.

Los altos niveles de corriente mostrados en la Figura 3 son adquiridos al ocurrir problemas de bifurcaciones tipo Hopf, esto es debido a que algunos eigenvalores del Jacobiano del sistema linealizado pasan al semiplano complejo derecho y por lo tanto el sistema no tiene amortiguamiento (parte real del eigenvalor positivo), provocando que los valores empiecen a incrementarse.

ESTADO ESTABLE

Al analizar este estado se registraron los valores de las variables de estado para las cuales el sistema se estabiliza, lo que corresponde al punto de equilibrio. Una vez que se ha localizado el punto de equilibrio se procede a linealizar el sistema alrededor de este punto aplicando las series de Taylor. Después se establece la estabilidad del punto de equilibrio por medio del teorema de Hartman-Grobman, el cual permite relacionar la estabilidad de los puntos fijos del sistema linealizado con la estabilidad de los puntos fijos del sistema no lineal.

Una vez conocida la estabilidad de un punto de equilibrio, el siguiente paso es variar la magnitud de los parámetros que integran el sistema dinámico, para ver si aparecen o no bifurcaciones.

En este trabajo se encontró que el voltaje de excitación presenta bifurcación Hopf en $E_i = 0.873237$ *pu*. En

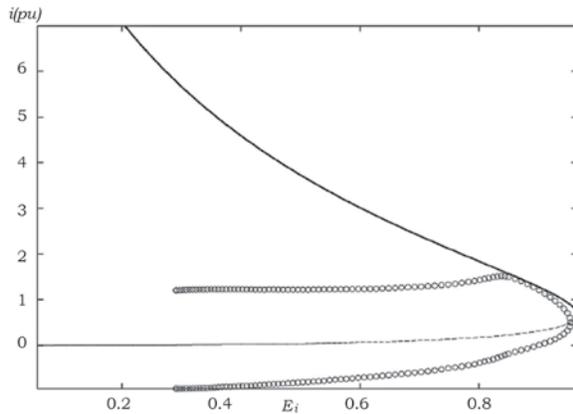


Figura 4. Diagrama de bifurcación del voltaje de excitación del generador, presenta bifurcación Hopf en $E_i = 0,873237 pu$. Los círculos vacíos representan las órbitas inestables.

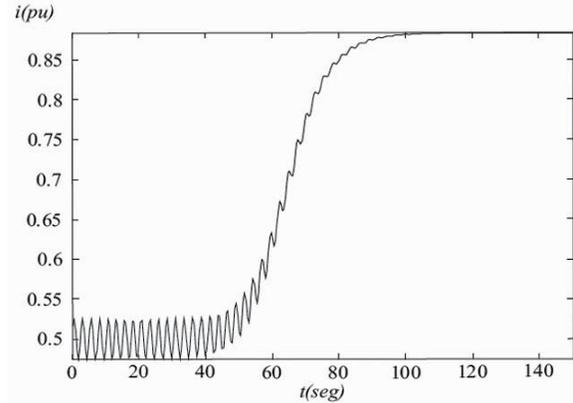


Figura 6. Comportamiento de la variable en estado periódico en BHI, la variable de estado i presenta inestabilidad y después de 110 segundos llega a la estabilidad.

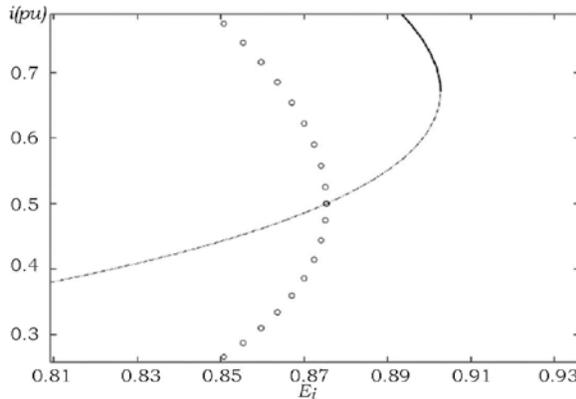


Figura 5. Parte oscilatoria del sistema, solo se presentan órbitas inestables.

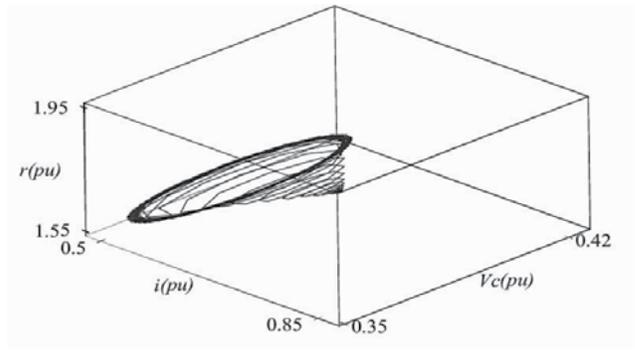


Figura 7. Comportamiento de tendencia estable en BHE, bajo ciertos valores de operación en $(r, V_c$ e i) es posible controlar el sistema.

la Figura 4, se muestra el correspondiente diagrama de bifurcación, el diagrama está construido utilizando las variables de estado i y E_i , variando el voltaje E_i desde 0.4121 hasta donde se presente la bifurcación, $E_i = 0.873237 pu$.

En la Figura 5 se observa que al analizar la parte oscilatoria del sistema solamente se tienen órbitas inestables (representadas por círculos), las cuales corresponden a una bifurcación Hopf inestable (BHI), la línea punteada representa la zona atractora inestable y la línea continua la estable, es decir, presenta ciclos inestables. En el caso de esta bifurcación, al operar en la zona BHI, la variable de estado presenta en el tiempo el comportamiento mostrado en la Figura 6, en ella se puede apreciar claramente la influencia de las órbitas inestables dentro de la zona de inestabilidad Hopf.

La Figura 7 muestra la tendencia de las variables del sistema a la estabilidad. El cambio de estabilidad en el punto de equilibrio tiende a la estabilidad, reflejándose en oscilaciones de menor amplitud en el sistema. Esto es debido a que el sistema es atraído por la estabilidad de sus variables de estado, por lo que existe la posibilidad de controlar dentro de un rango aceptable el sistema de potencia bajo ciertas condiciones de operación. En este caso es posible llevar el sistema a la estabilidad, siempre y cuando se encuentre dentro de una zona de operación cercana a la influencia del atractor estable (pozo de atracción del atractor).

CONCLUSIONES

Usando el método de bifurcaciones se analizaron las oscilaciones causadas por un horno de arco eléctrico aco-

plado al generador síncrono. Se mostró que en el voltaje interno del generador se presenta el parámetro de bifurcación en $E_i = 0.873237 pu$. Esto se debe principalmente a que es un parámetro en el comportamiento del generador, teniendo efecto en el voltaje en terminales del mismo presentando oscilaciones en las variables de estado.

Es de interés realizar un estudio en el cual se involucre un método de atenuación de estas inestabilidades y de control, así como interactuar con las estaciones de monitoreo de estas plantas.

AGRADECIMIENTOS.

Francisco Gómez y Lorena González agradecen al CONACYT por la beca de posgrado recibida durante parte del desarrollo de la presente investigación.

REFERENCIAS

- Acha E., Semlyen A. and Rajakovic N. A. Harmonic Domain Computational Package for Nonlinear Problems and its Applications to Electric Arcs., (Jul. 1990). *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 5, no. 3, pp 1390-1397.
- A. Medina and N. Garcia. (1999). Newton methods for the fast computation of the periodic steady state solutions of systems with nonlinear and time-varying components. *Conf. Proc. IEEE PES Summer Meeting*, vol. 2, Edmonton, AB, Canada, Jul. 18-22, pp. 664-669.
- A. Medina, M. Gómez, and C. R. Fuerte-Esquivel. (April 2005). Application of bifurcations theory to assess nonlinear oscillations produced by ac electric arc furnaces. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(2), pp. 801-806.
- Chapman S.J. (2000). *Electric Machinery Fundamentals*. Mc Graw Hill, 3rd edition.
- Hilborn, R. C. (1994), *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, Inc., USA. Capitulo 1, página 5.
- H. O. Wang, E. H. Abed, and A. M. A. Hamdan. (1994). Bifurcation, chaos and crisis in voltage collapse of a model power system. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 41, no. 3, pp. 294-302, Mar.
- H. S. Strogatz. (2000). *Nonlinear dynamics and chaos*. Cambridge. Ma, perseus publishing, Capitulo 3, página 52.
- I. Dobson and H. D. Chiang. (1989). Toward a theory of voltage collapse in electric power systems. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 13, pp. 253 - 262.
- N. Mithulananthan, C. A. Cañizares, J. Reeve, and G. J. Rogers. (May 2003). Comparison of PSSS, SVC and STATCOM controllers for damping power system oscillations. *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, pp. 786-792.
- R. Garcia-Kasusky, C. R. Fuerte-Esquivel, and D. Torres-Lucio. (2003). Assessment of the SVC effect on nonlinear instabilities and voltage collapse in electric power systems. *IEEE PES General Meeting*, vol. 4, Toronto, ON, Canada, pp. 2659-2666.
- S. H. Lee, J. K. Park, and B. H. Lee. (Jul. 2001). A study on the nonlinear controller to prevent unstable Hopf bifurcation. *IEEE Power Eng. Soc. Summer Meeting*, vol. 2, pp. 978-982.