

Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Simulación de Cimentaciones Superficiales.

Humberto Esqueda Oliva*, Salvador Botello Rionda* y Julio César Leal Vaca**.

RESUMEN

Se presenta una forma alternativa de cálculo para cimentaciones superficiales con respecto a los métodos clásicos, utilizando el Método de los Elementos Finitos, aplicando métodos numéricos para la solución de problemas no lineales en estructuras. Se utiliza un modelo matemático simple para la simulación del comportamiento del suelo, basado en la ley de resistencia al esfuerzo cortante de Mohr-Coulomb. Con estas herramientas se desarrolló un programa de cómputo fácil de utilizar. Los resultados pueden visualizarse de forma gráfica. Se presentan además dos ejemplos de aplicación de interés en el campo de la mecánica de suelos.

ABSTRACT

An alternative form of calculation for superficial foundations is presented (respect to classical methods), based on the Finite Element Method and numerical methods for non-linear structural problems. A simple mathematic model for the simulation of soil behavior is used, based on the Mohr-Coulomb's law of shear strength. A computer code was developed with these tools. This software is easy to use, and its results are visualized graphically. A couple of application examples are presented and of interest in the study of soil mechanics.

Recibido: 21 de Mayo 2004
Aceptado: 2 de Febrero de 2005

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos ancestrales el papel del ingeniero ha sido básicamente el mismo: tratar de conocer e interpretar los mecanismos de la naturaleza para así poder modificarla al servicio del hombre. Para ello ha utilizado sus conocimientos, su intuición y su experiencia y los medios materiales que ha tenido a su alcance en cada momento. Con el poder que le prestan actualmente las computadoras, el ingeniero dispone de medios extraordinarios para cumplir su misión.

Desde hace algunos años se ha utilizado el Método de los Elementos Finitos (MEF) (Cook, *et al.*, 1989) (Zienkiewicz, 1994) (Oñate, 1995), para estudiar el comportamiento de sólidos, formados con diferentes materiales, con formas complejas y sujetos a diferentes solicitaciones externas. Este método puede ser aplicado a gran número de problemas de ingeniería (Oñate y Botello, 1995), reduciendo cada vez más la incertidumbre del comportamiento de diferentes formas y distribuciones de materiales. Con él se pueden evaluar las variables más significativas de los fenómenos que se quieren estudiar, así como cuantificar la interacción de los diferentes mecanismos existentes. Lo anterior permite reducir el número de ensayos de laboratorio; lo que evidentemente conduce a proyectos más baratos y eficientes, que se obtienen en un tiempo de estudio mucho más corto.

Palabras clave:

Cimentaciones; Estructuras; Elementos finitos; Ecuación constitutiva; Resistencia al esfuerzo cortante; Esfuerzos principales.

Keywords:

Foundations; Structures; Finite element; Constitutive equation; Shear strength; Principal stresses.

Por otra parte, dentro del campo de la mecánica de suelos, frecuentemente el ingeniero se ve obligado al uso de técnicas que contienen una buena dosis de empirismo, lo cual hace que su criterio y experiencia jueguen un papel primordial en el diseño de estructuras que tienen mucho que ver con el suelo. Esto lleva en muchas ocasiones al empleo de factores de seguridad muy altos, lo que puede conducir al sobrediseño; o, en el otro extremo, a soluciones inseguras.

* Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT). Jalisco s/n, Mineral de Valenciana. C.P. 36240. Guanajuato, Gto. México esqueda@cimat.mx, botello@cimat.mx.

** Universidad de Guanajuato. Facultad de Ingeniería Civil. Av. Juárez 77. C.P. 36000. Guanajuato, Gto. México.

SIMBOLOGÍA

- u, v : Desplazamientos horizontal y vertical de un punto, respectivamente. Vectores de desplazamientos.
- δ : Símbolo que denota “virtual” a la variable que precede en la expresión del principio de los trabajos virtuales.
- ε : Vector de deformación unitaria.
- σ : Vector de esfuerzos.
- t : Vector de fuerzas de superficie.
- a : Vector de desplazamientos locales de un elemento.
- N_i : Función de forma del nodo i .
- N : Matriz de funciones de forma.
- B : Matriz de deformación de un elemento.
- D : Matriz constitutiva de un material.
- K : Matriz de rigidez .
- f : Vector de fuerzas externas.
- Ψ_i : Vector de fuerzas residuales en iteración i .
- P : Vector de fuerzas internas.
- τ : Esfuerzo cortante.
- c : Valor de la cohesión del suelo.
- ϕ : Ángulo de fricción interna.

METODOLOGÍA

Breve descripción del MEF en mecánica de sólidos.

El equilibrio estático de un sólido puede expresarse por el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) (Malvern, 1969) como

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T b dV + \int_A \delta u^T t dA + \sum_i \delta a_i^T q_i$$

El primer miembro de esta ecuación representa el trabajo virtual interno del sólido, expresado como el producto de los esfuerzos y deformaciones que aparecen en el sólido por la aplicación de fuerzas externas. El segundo miembro es el trabajo virtual externo, que es el trabajo realizado por las fuerzas externas. La primera integral se refiere a fuerzas másicas (generalmente debidas a la acción de la gravedad) y la segunda a fuerzas de superficie (presión de aire, agua, otros objetos que se apoyan, etc.) y que actúan sólo en algunas partes del sólido. La sumatoria que aparece al final se refiere a la acción de fuerzas concentradas sobre puntos del sólido.

Estas integrales están definidas sobre un medio continuo, y son muy difíciles de evaluar a menos que el sólido tenga una forma regular. Ahora, partiendo el sólido en cuestión en un número finito de elementos geométricos (discretización en una malla), como el sólido que se muestra en la Figura 1, las integrales que aparecen en la expresión del PTV pueden evaluarse numéricamente.

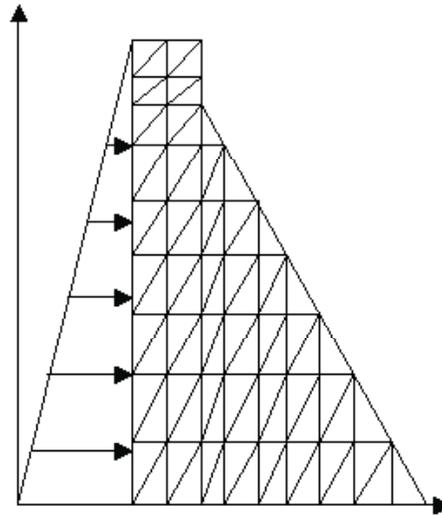


Figura 1. Discretización de una presa en Elementos Finitos. Cargas externas que modelan la presión hidrostática en la presa.

Para poder pasar del medio continuo al medio discreto, se utilizan unas funciones de interpolación (llamadas también *funciones de forma*), de modo que nos permitan conocer el valor de cualquier parámetro en el interior del elemento a partir de los valores en los nodos. Considérese el elemento triangular de la figura 2.

Por ejemplo, se puede expresar el campo de desplazamientos en el interior del elemento como

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3$$

Donde N_i es la función de forma del nodo i , y las u_i y v_i son los valores de los desplazamientos en el nodo i . Resulta de esto que las funciones de forma deben valer 1 en su nodo y 0 en los demás. Además, en cualquier punto en el interior del elemento, los valores de las funciones de forma deben sumar 1.

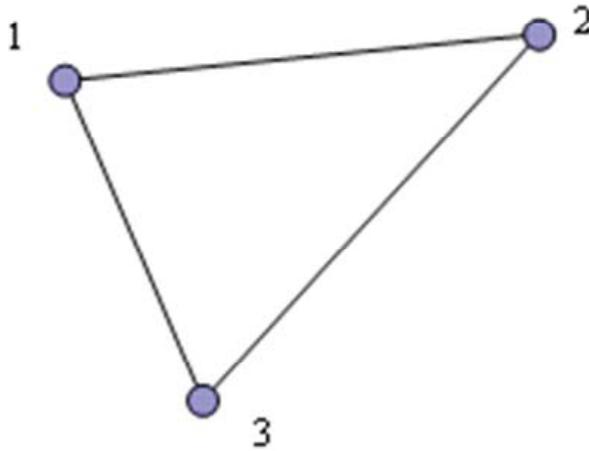


Figura 2. Elemento Finito triangular de tres nodos.

Expresando el campo de desplazamientos en forma matricial, se tiene

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

que se puede escribir en forma reducida como

$$u = Na^{(e)}$$

donde

$$N = [N_1, N_2, N_3], \quad u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

con

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Para problemas bidimensionales (esfuerzo plano y deformación plana), el campo de deformaciones y el campo de esfuerzos vienen dados por (Timosenko, 1968)

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

En problemas de esfuerzo plano (ej. placas a tensión, vigas de gran canto) la deformación ϵ_z es diferente de 0, pero el esfuerzo normal σ_z sí lo es. En problemas de deformación plana (ej. cortinas de presas de gran longitud) el esfuerzo normal es σ_z distinto de 0, pero la deformación normal ϵ_z es 0. En cualquier caso, el producto de ambos que resulta de multiplicar los vectores de esfuerzo y deformación que aparece en el primer miembro de la ecuación del PTV será cero, por lo que no es necesario incluirlos en los cálculos. Los vectores de esfuerzo y deformación se relacionan entre sí por medio de la ecuación (Timosenko, 1968).

$$\sigma = D\epsilon$$

En la expresión anterior, D es la matriz constitutiva, dependiente del tipo de problema a resolver, y de la *ecuación constitutiva del material*, la cual gobierna las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones unitarias en un material.

El campo de deformaciones puede expresarse matricialmente como

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

O bien en forma reducida

$$\epsilon = Ba^{(e)}$$

Donde

$$B = [B_1, B_2, B_3] \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la matriz de deformación B contiene tantas submatrices B_i como nodos tiene el elemento, lo cual es una propiedad general. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del PTV y operando, puede reescribirse como:

$$\left[\int_V B^T DB dV \right] a^{(e)} = \int_V N^T b dV + \int_A N^T t dA + q^{(e)}$$

En ambos miembros de la ecuación anterior se ha cancelado un vector correspondiente a $\delta a^{(e)}$, al ser un factor común en todas las integrales. Esta ecuación puede expresarse en forma reducida como el sistema de ecuaciones

$$K^{(e)} a^{(e)} = f^{(e)}$$

donde $K^{(e)}$ es la matriz de rigidez del elemento, $a^{(e)}$ es el vector de desplazamientos nodales del elemento y $f^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes actuantes sobre el elemento.

Para este caso (elemento triangular de tres nodos), las funciones de interpolación N_i tienen la forma siguiente:

$$N_i = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{con} \quad a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

Donde $A^{(e)}$ es el área del elemento triangular en cuestión. Las dos expresiones anteriores permiten obtener las funciones de forma de los tres nodos del triángulo de la forma siguiente: para N_1 , $i = 1$, $j = 2$, y $k = 3$; para N_2 , $i = 2$, $j = 3$, y $k = 1$; y para N_3 , $i = 3$, $j = 1$, y $k = 2$. La numeración local de los nodos debe tener un sentido antihorario.

En las expresiones anteriores, resulta evidente que en las funciones de forma del elemento triangular de 3 nodos aparecen sólo funciones lineales de las coordenadas del elemento. Por lo tanto, las derivadas parciales de las funciones de forma que aparecen en la matriz de deformación B serán constantes. Con ello, el lector puede verificar fácilmente que la evaluación de la primera integral que aparece en la última expresión del PTV es numéricamente muy sencilla, considerando al elemento plano y de espesor constante. (No resulta tan obvio para las demás integrales,

pero tampoco es difícil, y el lector puede consultarlo en cualquiera de las referencias mencionadas). Las matrices y vectores de todos los elementos de la malla se ensamblan para formar el sistema de ecuaciones lineales global

$$Ku = f$$

Este sistema de ecuaciones es singular, y para poder resolverlo es necesario establecer condiciones de contorno en la malla, lo cual se traduce en la restricción de movimientos de algunos nodos de la malla hasta eliminar la singularidad de la matriz K . Físicamente eso implica poner apoyos en el sólido, de modo que formen una estructura estable frente a cualquier carga que se le imponga. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (con lo que se obtienen los desplazamientos de los nodos), se calculan los esfuerzos en los nodos de la malla y muchos otros parámetros (deformaciones unitarias, relación de esfuerzo máximo contra esfuerzo resistente, etc) (Oñate, 1995). Este procedimiento es muy similar al empleado en el cálculo matricial de estructuras de barras, familiar para la mayoría de los ingenieros.

Existen otros tipos de elementos utilizados en la práctica, como los que se muestran en la Figura 3. Esos elementos tienen una mejor aproximación que el elemento triangular de tres nodos (Yang, 1986) (Oñate, 1995), lo que se traduce en resultados más precisos con muchos menos grados de libertad con respecto al elemento triangular de tres nodos. Sin embargo, para que dichos elementos sean tan versátiles como el elemento triangular, es necesario utilizar una formulación isoparamétrica de las funciones de forma (Cook, *et al.*, 1989) (Oñate, 1995). Esto hace que las derivadas que aparecen en la matriz B ya no sean constantes, y además contienen funciones racionales de las funciones de interpolación, lo que obliga al uso de integración numérica para poder evaluar las integrales que aparecen en la expresión del PTV. Los detalles de esto se dan en las referencias (Oñate, 1995) (Ralston, 1970).

Solución de problemas no lineales en estructuras por incrementos de carga

El método descrito, tal y como está, sólo puede aplicarse en problemas que involucran leyes constitutivas lineales y relaciones deformación-desplazamiento también lineales. Si estas relaciones no son lineales, como evidentemente ocurre en los suelos, entonces será necesario emplear técnicas numéricas especiales que permitan resolver dichos problemas. El uso de

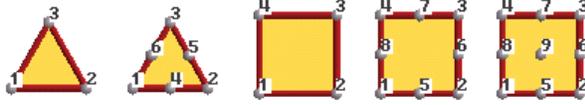


Figura 3. Elementos finitos bidimensionales más utilizados.

técnicas iterativas permite reutilizar los métodos para problemas lineales en la solución de problemas no lineales. (Bathe, 1982) (Zienkiewicz, 1994).

Para la solución del problema no lineal, se utilizaron los métodos de Newton-Raphson y de Newton-Raphson modificados (Dahlquist, 1974), dada su versatilidad y sencillez de programación. En la Figura 4 se ilustra el procedimiento de solución. En dicha figura aparece el método de Newton-Raphson, aunque la implementación de los métodos de Newton modificados es totalmente análoga y conceptualmente no representa ninguna dificultad adicional.

La figura es una gráfica de fuerzas contra desplazamientos de una estructura, la cual sigue una curva asociada a ecuaciones constitutivas (esfuerzo-deformación) no lineales de algunos (o todos) componentes de la estructura. Aunque la gráfica mostrada es unidimensional, es totalmente general si se visualizan sus componentes como vectores globales de la estructura y no como simples escalares.

Partiendo de un punto sobre la curva para la cual se ha encontrado la solución de equilibrio entre fuer-

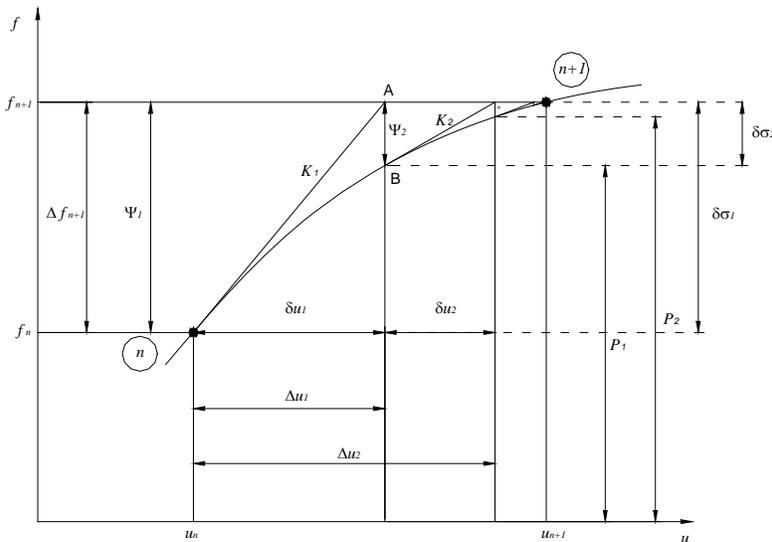


Figura 4. Procedimiento de solución utilizando el método de Newton-Raphson.

zas (f_n) y desplazamientos (u_n). Entonces, aplicando un incremento de fuerzas Δf , se debe llegar al punto $n+1$ sobre la gráfica. Si i es el contador de iteraciones dentro del incremento Δf_{n+1} , la solución se obtiene aplicando sucesivamente un vector de fuerzas residuales Ψ_i , comenzando con $\Psi_1 = \Delta f_{n+1}$. En cada iteración, se obtiene un incremento de desplazamientos δu_i , que resulta de

$$\Psi_1 = K_i \delta u_i$$

donde K_i es la matriz elástica tangente de la estructura. Dicha matriz resulta de ensamblar las matrices de rigidez individuales de los elementos que formen la malla, la cual se obtiene por medio de la relación

$$K^{(e)} = \int_V B^T D B dV$$

donde D es la matriz constitutiva del material, dependiendo del tipo de problema, y que depende de la ecuación constitutiva. Como D es dependiente del nivel de deformación (y por tanto de los desplazamientos), entonces se tiene la relación no lineal entre fuerzas y desplazamientos, asociada con leyes constitutivas no lineales.

Siguiendo con la figura, al incremento de desplazamientos δu_i , le está asociado un incremento de esfuerzos en cada elemento $\delta \sigma_i$, el cual está dado por la relación

$$\delta \sigma_i = D B \delta u_i^{(e)}$$

Es importante señalar que en la expresión anterior, D tiene el valor en el punto i de la curva. Entonces, el incremento de esfuerzos $\delta \sigma_i$ se suma al vector de esfuerzos σ_n , que se tenía anteriormente (y para el cual se había encontrado la solución de equilibrio), lo cual da un nuevo vector de esfuerzos totales σ_i . Sin embargo, este estado de esfuerzos (punto A de la figura) no es el real para el nivel de deformación que se tiene (dependiente de los desplazamientos acumulados $u_n + \Delta u_i$), sino que los esfuerzos actuantes realmente corresponden a un vector σ^c (punto B). Esto es, una vez calculado σ^i , hay que corregirlo al valor σ^c que depende del nivel de deformación del elemento. Esto produce un desequilibrio de fuerzas en la estructura, te-

niéndose el vector de residuos

$$\Psi_{i+1} = f_{n+1} - P_i$$

donde P_i es el vector de fuerzas internas dado por

$$P_i = \int_V B^T \sigma_i dV$$

Este nuevo vector de fuerzas desequilibradas Ψ_{i+1} se aplica de nuevo a la estructura, pero ahora con una matriz elástica tangente K_{i+1} en el punto $i+1$. Este procedimiento se sigue sucesivamente hasta lograr que Ψ_i se reduzca a un valor muy pequeño.

Para los métodos de Newton-Raphson modificados el procedimiento anterior también es válido, con la única diferencia de que la pendiente K_i puede permanecer constante dentro de cada incremento de carga (tangente al inicio del incremento) o bien puede tomarse la misma matriz tangente desde el principio (tangente al inicio del problema).

Ahora bien, es necesario adoptar una norma del residuo que nos permita terminar con las iteraciones, puesto que la reducción a cero del vector de residuos es prácticamente imposible para sistemas con muchos grados de libertad. Para esto, se adopta la norma escalar siguiente

$$e = \frac{|\Psi_i|}{|\Delta f_{n+1}|}$$

donde e es la tolerancia o el error permisible.

Es posible que, dada una curva de fuerzas contra desplazamiento, no exista solución por encima de un cierto valor de f . Es por esto que es necesario imponer un límite al número de iteraciones que puede haber dentro de un incremento, pues de no existir, el programa puede caer en un ciclo infinito. Dicho esto, teóricamente puede afirmarse que si no se encuentra la convergencia dentro de un incremento de carga, la estructura no es capaz de resistir la carga que se le ha impuesto. Esto no siempre es cierto, ya que si el incremento de carga es demasiado grande, el programa no logrará la convergencia en un número máximo de iteraciones, a pesar de que sí existe solución por encima del nivel de carga aplicado.

Resistencia máxima de los suelos. Ecuaciones constitutivas

Según se desprende de la literatura existente en el tema, las mejores pruebas de laboratorio disponibles para la determinación de los parámetros mecánicos de los suelos son las pruebas de compresión triaxial de resistencia al esfuerzo cortante (Juárez y Rico, 1974).

Dentro de la mecánica de suelos se acepta que los suelos se comportan de acuerdo con la ley de resistencia de Mohr-Coulomb (Juárez y Rico, 1974)

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

Esta ecuación es una ley constitutiva de material elastoplástico perfecto como la que se ilustra en la Figura 5. Sin embargo, la deformación en el punto de falla (y por lo tanto el esfuerzo máximo) no está definida, dado que el esfuerzo cortante de falla no tiene un valor constante, sino que depende del esfuerzo confinante σ que aparece en la ecuación de Mohr-Coulomb. De hecho, los parámetros c y ϕ que intervienen en ella tampoco son constantes, pues dependen del contenido de humedad del suelo, de la velocidad de aplicación de la carga y de las condiciones de drenaje en que se encuentre el suelo (Juárez y Rico, 1974).

Todos estos parámetros son difíciles de considerar en una sola ecuación constitutiva, por lo que, con fines de simplificación, no se toman en cuenta en el cálculo los factores que producen las variaciones en

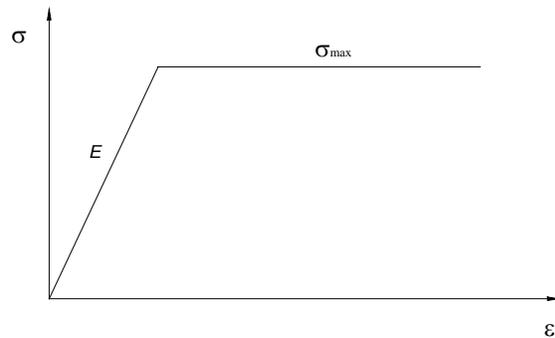


Figura 5. Ley constitutiva para material elastoplástico perfecto.

los valores de c y ϕ . En lugar de ello, se asume que esos factores deben ser considerados *a priori*, de modo que se debe analizar las condiciones en que se encontrará la estructura que se modela, y a partir de ahí elegir el tipo de prueba de laboratorio más adecuada para la obtención de los parámetros mecánicos.

Por lo tanto, si se quieren modelar diferentes condiciones de humedad y de carga, será necesario realizar pruebas de laboratorio variando dichas condiciones y hacer un análisis numérico para cada una de ellas.

En todo lo anterior, se ha supuesto que los esfuerzos actuantes en la masa de suelo son *de compresión*. La resistencia de los suelos a esfuerzos de tensión es muy pequeña, tanto que se considera nula. Se puede seguir dicha convención, o bien especificar un valor

máximo (de esfuerzo o de deformación) a tensión que dicho suelo puede resistir.

Debe resaltarse que los valores de los esfuerzos que aparecen en la ley de Mohr-Coulomb (y en general de cualquier ley constitutiva) no dependen de la orientación de los ejes que se haya elegido. Por lo tanto, antes de aplicar cualquier corrección, será necesario calcular los *esfuerzos principales* y las *direcciones principales*. (Malvern, 1969) (Esqueda, 2004).

Corrección de esfuerzos en suelos

El primer paso para realizar el ajuste es el tratamiento de los esfuerzos de tensión, que deben ser reducidos a un valor máximo (que en general es nulo, o muy pequeño). Enseguida, se obtiene la dirección del esfuerzo principal de compresión *mínimo*. En función de dicho esfuerzo principal mínimo (confinamiento), se calcula el esfuerzo principal máximo que el punto en cuestión puede resistir.

Dado un valor σ_3 (considerado como el esfuerzo principal mínimo) actuante en un punto, se desea calcular el esfuerzo principal máximo σ_1 que puede actuar en el mismo punto para que se encuentre en falla incipiente. Para que esto ocurra, puede verse en la Figura 6 que, en una gráfica τ - σ de Mohr, ambos puntos deben estar ubicados sobre un círculo tangente a la línea $\tau = c + \sigma \tan \phi$. Entonces, conocido σ_3 , puede calcularse σ_1 con la relación

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2R$$

por lo que el problema consiste en determinar el valor del radio R . Este problema se resuelve fácilmente mediante sencillas relaciones trigonométricas (Esqueda, 2004), las cuales pueden deducirse directamente de la Figura 6.

Una vez calculado este valor, se procede al ajuste de esfuerzos. Este se hace de modo muy simple, pues se comparan los valores de los otros dos esfuerzos principales actuantes en el punto con el máximo que se acaba de obtener; si son mayores, entonces se igualan al esfuerzo máximo resistente, y si son menores se dejan tal como están. El proceso se ilustra en la Figura 7.

En dicha figura, se tiene un punto cuyo esfuerzo principal mínimo es σ_{min} . El círculo I es el de falla, por

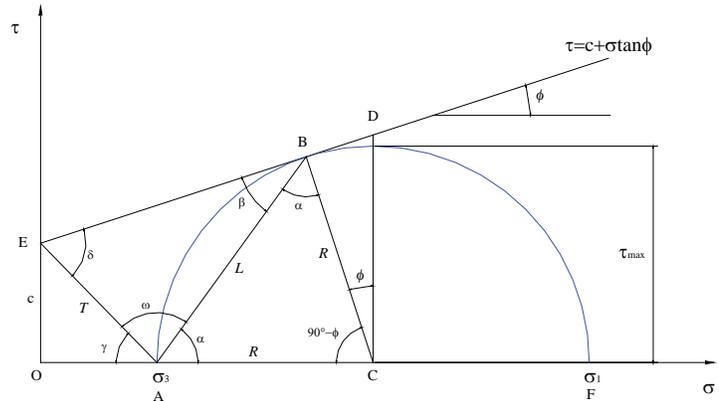


Figura 6. Cálculo del esfuerzo principal máximo que puede aplicarse a un suelo a partir del esfuerzo principal menor.

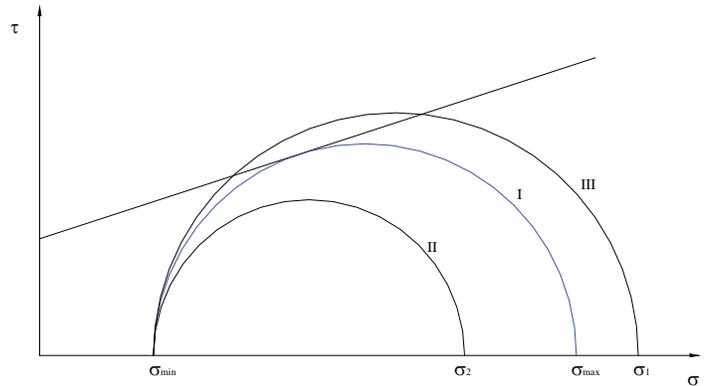


Figura 7. Ajuste de esfuerzos en el espacio de principales.

ser tangente a la línea de falla, siendo σ_{max} el esfuerzo principal máximo que puede resistir el punto en cuestión. Por lo tanto, si en el mismo punto actúa un esfuerzo principal σ_2 (círculo II), éste no está en falla y no se le hará ninguna corrección. En cambio, si se tiene un esfuerzo principal correspondiente a σ_1 (círculo III), éste valor será corregido al valor de σ_{max} , por ser el valor máximo que se puede tener en dicho punto.

Una vez que se ha realizado la corrección, entonces deben regresarse los esfuerzos principales al espacio cartesiano en el que se trabaja con ayuda de las direcciones principales. Los detalles de esto figuran en Esqueda, 2004.

Este procedimiento se refiere únicamente al tratamiento de esfuerzos con incrementos de carga que son siempre *positivos*. Es decir, se supone que la relación

esfuerzo deformación, si bien no es lineal, tiene una solución única. Por tanto, el modelo no es utilizable para situaciones donde se presenten ciclos de carga y descarga, para los cuales es necesario el uso de la teoría general de la plasticidad, donde las relaciones constitutivas no son únicas, siendo importante entonces la historia de carga en el tiempo. Ese método se basa en el concepto de *superficie de fluencia*, y para obtenerla existen numerosas teorías aplicables a distintos tipos de materiales, siendo en suelos las más importantes la de Mohr-Coulomb y la aproximación de Drucker-Prager (Drucker, 1952).

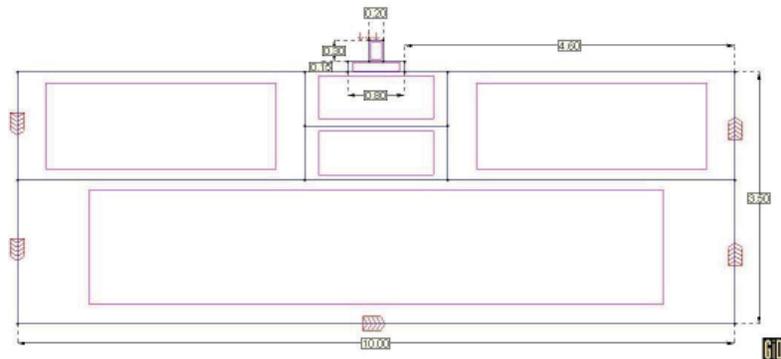
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se generó un programa de cómputo, el cual funciona dentro del programa de pre y postproceso GiD versión 7 (Ribó, *et al.*, 2003). El programa que se obtuvo es alimentado con parámetros fáciles de obtener en pruebas de laboratorio de Mecánica de Suelos, como la de compresión triaxial de resistencia al esfuerzo cortante. Este trabajo fue desarrollado en las instalaciones del aula UGTO-CIMNE de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad de Guanajuato y en el Centro de Investigación en Matemáticas A.C. Se utilizó una computadora personal Pentium 4 a 3 GHz con 3 GB en RAM para el cálculo de los ejemplos.

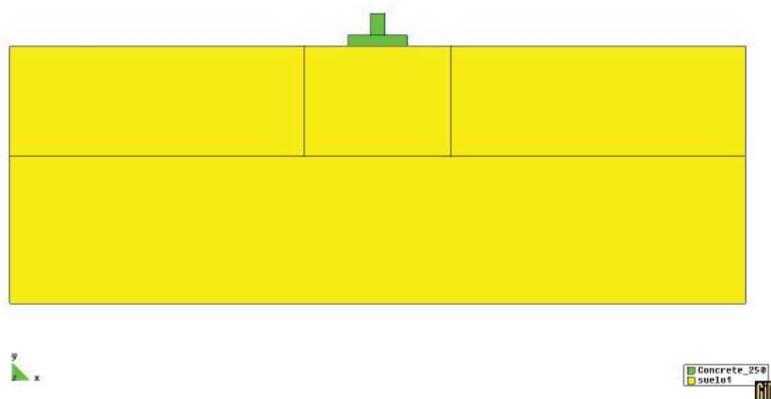
El primer ejemplo mostrado es una zapata corrida sin carga excéntrica. La geometría del problema, las condiciones de contorno (en forma simbólica) y los materiales aparecen en la Figura 8. Se trata de una zapata corrida de concreto 0,80 m de ancho y 0,15 m de peralte, con una contratrabe de 0,20 m de ancho por 0,30 m de alto. El suelo en que se desplanta está representado por una porción de terreno de 10 m de largo y 3,50 m de profundidad. En la base del suelo están impedidos los desplazamientos horizontales y verticales (se asume que a esa profundidad del suelo ya no son significativos los efectos de la zapata). En los lados sólo se han impedido los desplazamientos horizontales pues se supone que el medio tiene una gran extensión.

La carga aplicada al cimiento fue de 12 000 kg/m. El problema considerado es de deformación plana; tomando un espesor de 10 cm y repartiendo la carga entre el ancho de la contratrabe, se tiene que la presión aplicada (carga lineal variable) es de 60 kg/cm. La carga fue aplicada en 15 incrementos; en los dos primeros se consideró únicamente el peso propio del sistema y en los trece restantes se aplicó la carga mencionada. En la figura 9 se muestra la malla de elementos finitos utilizada en el cálculo.

Las propiedades utilizadas para el suelo son $c=0,31$ kg/cm² y $\phi=12,66^\circ$. El módulo elástico considerado es de 200 kg/cm², y el módulo de Poisson es de 0,35. Estos datos se obtuvieron de un estudio de mecánica de suelos, el cual incluyó pruebas de compresión triaxial sin consolidación ni drenaje. El



a) Geometría y condiciones de contorno



b) Materiales utilizados.

Figura 8. Zapata Corrida sin carga excéntrica.

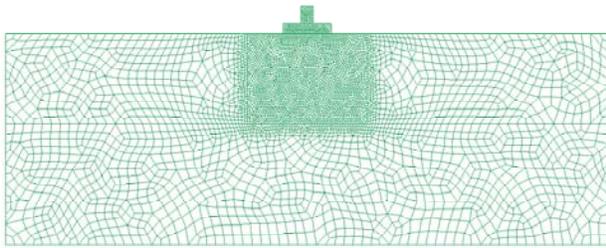


Figura 9. Malla de 4680 elementos cuadriláteros de 8 nodos (14309 nodos).

programa logró convergencia hasta el incremento 15; pero analizando las deformaciones resultantes, se tiene que el cimiento falla desde el incremento 14, por lo tanto la carga resistida sin fallar es de $12\,000 / (13) * 11 = 10\,153,84$ kg/m, en el incremento 13.

La Figura 10 muestra el campo de desplazamientos verticales. Se tiene que el desplazamiento máximo es de 1,27 cm, uniforme en toda la zapata.

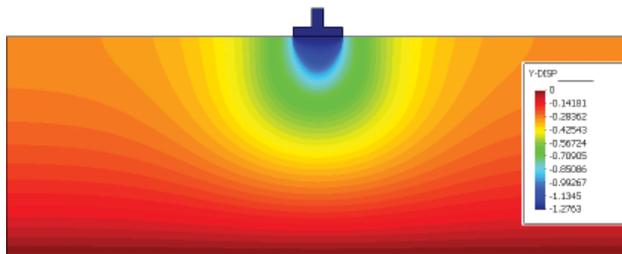


Figura 10. Campo de desplazamientos verticales para Zapata Corrida.

En la Figura 11 ahora aparece el campo de la distribución de los esfuerzos verticales (en kg/cm²), en una zona ampliada bajo la zapata. Por medio de las utilerías de GiD, puede obtenerse que el esfuerzo vertical inmediatamente debajo de la zapata es de 1,11 kg/cm². Puede verse un campo que muestre los vectores de esfuerzos principales (Figura 12). Los rojos indican tensión y los azules compresión. Puede verse en ese campo que en el suelo únicamente actúan esfuerzos de compresión, mientras que las tensiones se encuentran en el lecho inferior de la zapata, que es la zona donde se coloca el acero de refuerzo.

En la Figura 13 aparece el campo del cociente entre el esfuerzo máximo actuante y el esfuerzo máximo resistente. Se ve en él que hay una zona debajo de la zapata con forma aproximada a una cuña, donde el material no está cargado a su máxima capacidad. Se ve entonces el principio de formación del mecanis-

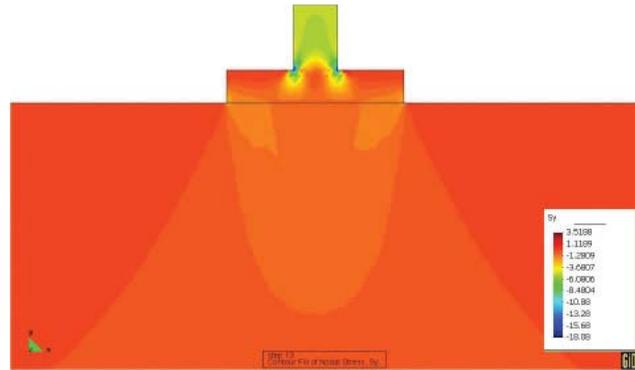


Figura 11. Distribución de esfuerzos verticales en Zapata Corrida.

mo de falla supuesto en la teoría de Terzaghi (Juárez y Rico, 1979). Sin embargo, no llega a desarrollarse por completo.

La explicación de este fenómeno es simple, razonando de la siguiente manera: En la zona que está inmediatamente bajo la zapata, el suelo es comprimido por la carga que ésta le transmite. Entonces, tiene lugar una deformación volumétrica, que sería sólo en sentido vertical, pero que también produce una deformación horizontal para poderse adaptar al cambio de volumen. Entonces, como las partículas de suelos no están aisladas, tratan de empujar lateralmente a las otras. Esto hace que, a medida que aumenta el esfuerzo vertical, también aumentará el esfuerzo horizontal bajo la zapata, lo que se traduce en un *aumento de la presión confinante*. Como la magnitud del esfuerzo principal máximo que puede resistir el suelo está en función del esfuerzo principal menor, es decir, de su *esfuerzo confinante*, entonces el material puede resistir más carga. Obviamente, esta tendencia no es igual para todos los puntos que están bajo la zapata, por lo tanto la zona donde eso ocurre está limitada por una especie de cuña.

Sin embargo, ya no se alcanza a formar el mecanismo de falla propuesto por Terzaghi debido a que en él se supone una movilización (deslizamiento) grande de una masa de suelo. Este estado no puede ser reproducido por el modelo que se utiliza, debido a que en la relación deformación-desplazamiento utilizadas en el cálculo intervienen únicamente las *primeras derivadas* de los desplazamientos (Esqueda, 2004), lo que se cumple solamente para *pequeñas deformaciones*. Entonces, se debería utilizar la teoría de los grandes desplazamientos (Zienkiewicz, 1994) pues además la posición de las cargas también cambia.

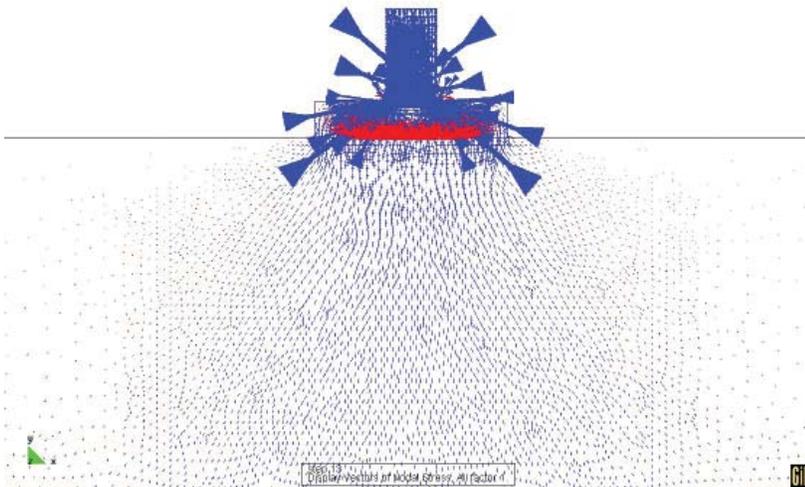


Figura 12. Distribución de esfuerzos principales en Zapata Corrida.

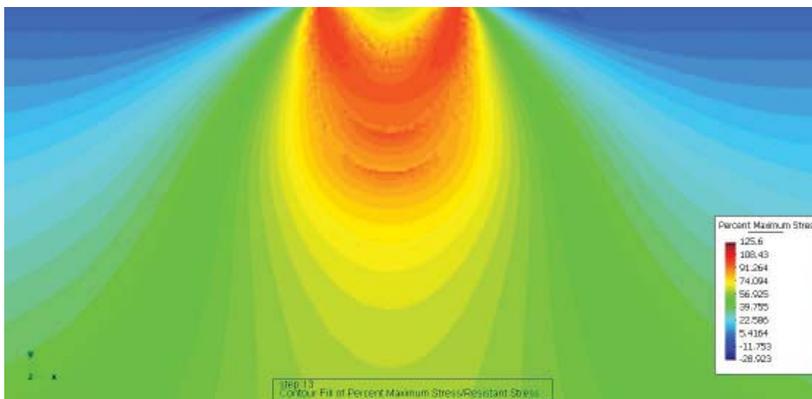


Figura 13. Razón entre esfuerzo máximo actuante y resistente en Zapata Corrida.

El segundo ejemplo presentado es una zapata corrida de colindancia, que tiene un comportamiento diferente a la del ejemplo anterior por estar cargada excéntricamente. La zapata tiene un ancho de 60 cm, un peralte de 15 cm y tiene adosada una contratrabe de 30 cm de peralte por 20 cm de ancho. La porción de suelo representada es de 3,95 m de profundidad y 10 m de ancho. La geometría del problema y condiciones de contorno (en forma simbólica) aparecen en la Figura 14. En este caso, en los lados

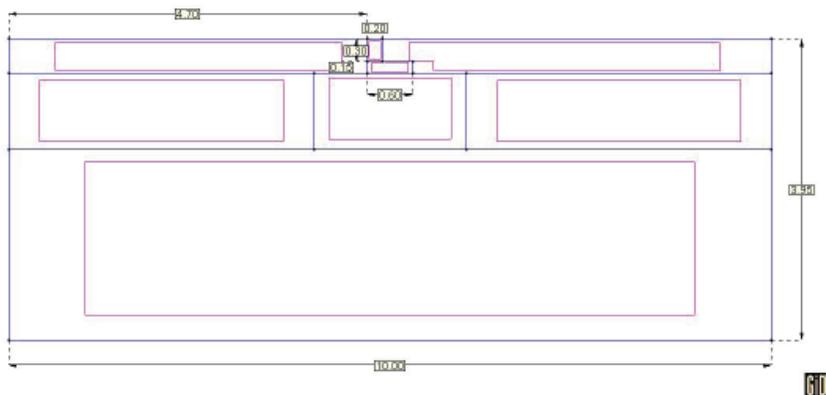


Figura 14. Geometría y condiciones de contorno de Zapata Corrida de Colindancia.

del suelo sólo se han restringido los desplazamientos horizontales, en su base los dos movimientos y la carga se aplica a la zapata en la corona de la contratrabe.

La carga aplicada está uniformemente distribuida, y tiene una magnitud de 30,475 kg/cm. Se considera un estado de deformación plana, con un espesor de 10 cm.

Por lo tanto, la carga en la zapata es de $30,475(20)(10) = 6\ 095$ kg/m, con una excentricidad de 20 cm. Las propiedades del suelo utilizadas son las mismas que en el ejemplo anterior. En la Figura 15 aparece la malla de elementos finitos utilizada. Para la solución del problema, se emplearon 15 incrementos de carga, 2 para peso propio y 13 para la carga en el cemento. El programa logró la convergencia total y no hay deformaciones excesivas o sin sentido físico. El campo de desplazamientos verticales se muestra en la Figura 16, con un desplazamiento máximo de 0,96 cm. Obviamente los desplazamientos no son uniformes en toda la zapata, debido a la excentricidad de la carga.

Se tiene entonces que la presión bajo la zapata tampoco será uniforme

(Figura 17). El valor máximo es de 1,12 kg/cm², y el valor mínimo es de 0,38 kg/cm².

Analizando el campo de vectores de esfuerzos principales en las inmediaciones de la zapata (Figura 18). Como era de esperarse, las tensiones en la zapata aparecen en el lecho inferior (donde se coloca el acero de refuerzo), y la intensidad máxima se presenta precisamente al paño de la contratrabe. Analizando los vectores en el suelo, puede verse que tienen una intensidad mayor en la parte izquierda de la zapata, lo que es lógico dada la excentricidad de la carga. Sin embargo, en la parte vertical izquierda de la zapata se aprecia también un empuje del suelo, el cual equilibra

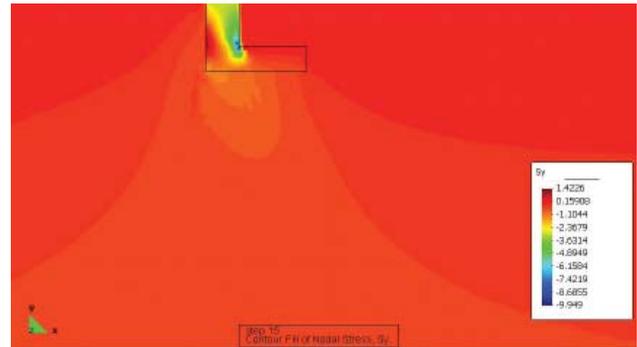


Figura 17. Esfuerzos normales verticales en Zapata Corrida de Colindancia.

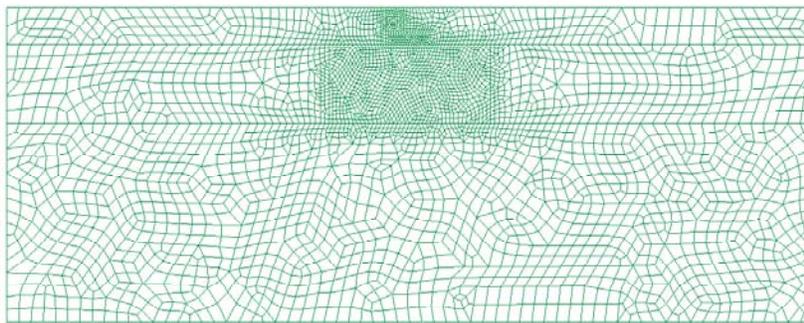


Figura 15. Malla de 3800 elementos cuadriláteros de 8 nodos (11617 nodos).

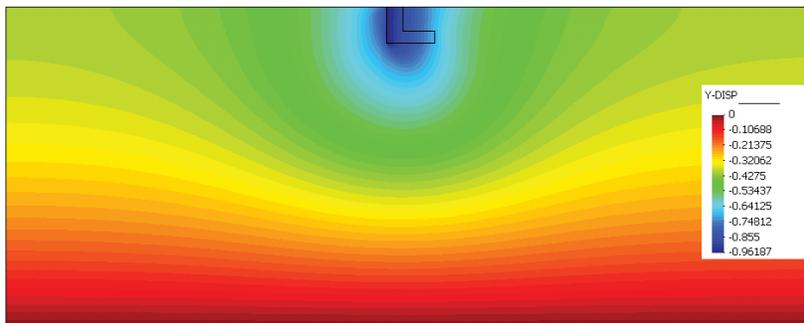


Figura 16. Desplazamientos verticales en Zapata Corrida de Colindancia.

el momento producido por la excentricidad de la carga. Para entender mejor por qué aparece esto, se presenta una configuración deformada del sistema, comparándola con la original (Figura 19).

Se aprecia que la zapata tiene un efecto de rotación, a causa de la distribución desigual de presiones en la base. Debido a que la zapata es mucho más rígida que el suelo, la parte izquierda tenderá a empujar al suelo. Este efecto pocas veces se toma en cuenta en el diseño de cimentaciones, y por lo general se busca

que otros elementos estructurales se conecten a la zapatas de colindancia y ayuden a disminuir la excentricidad de la carga.

Ahora, revisando el campo del cociente entre el esfuerzo máximo actuante y el esfuerzo máximo resistente. (Figura 20). En él se ven dos zonas que están cargadas a su capacidad máxima; una es bajo el extremo izquierdo de la zapata y la otra en el contacto del suelo con el paño exterior del cimiento. Esto concuerda con todo lo discutido acerca de este ejemplo.

Todos los resultados obtenidos son cualitativamente muy buenos, aunque es difícil compararlos con otros modelos numéricos. Existen varios programas comerciales de elementos finitos que utilizan modelos no lineales para suelos. Algunos tienen un modelo parecido (y hasta más refinado), pero no consideran la metodología presentada

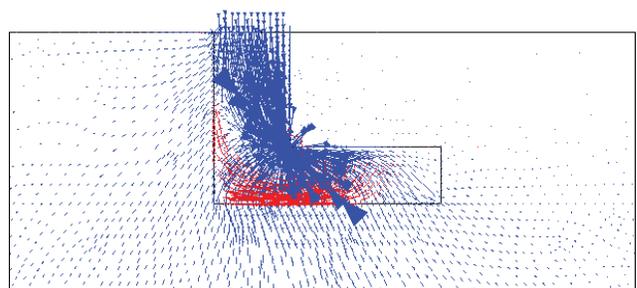


Figura 18. Vectores de esfuerzos principales (rojo indica tensión y azul compresión) en Zapata Corrida de Colindancia.

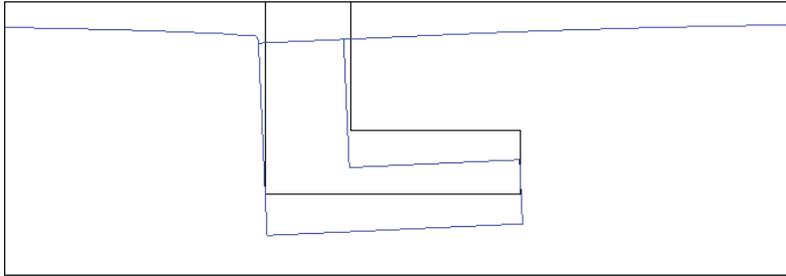


Figura 19. Deformada de la Zapata Corrida de Colindancia aumentada 10 veces.

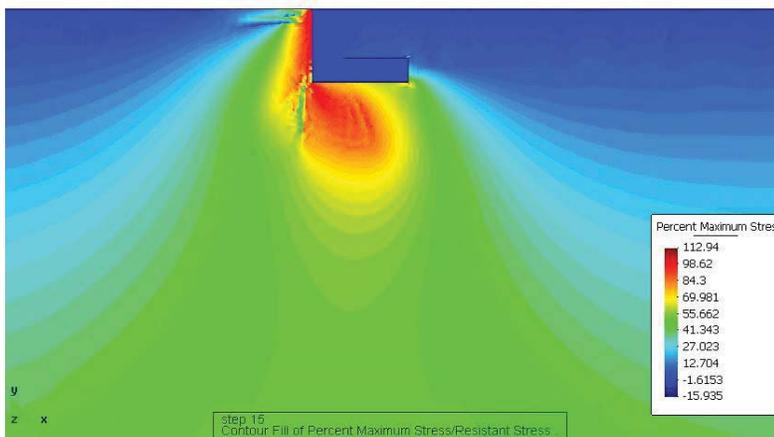


Figura 20. Razón entre esfuerzo máximo actuante y resistente en Zapata Corrida de Colindancia.

en este trabajo por lo que no es posible comparar los efectos en los cimientos con el mismo detalle. En general, los modelos no lineales que utilizan los programas comerciales requieren de más parámetros, como ángulo de dilatación, permeabilidad, etc., que no son tan fáciles de obtener. Esto definitivamente influye en los resultados que se obtengan.

El punto de comparación utilizado para los resultados es la propia experiencia de las fallas reportadas en cimentaciones reales y por las investigaciones hechas al respecto por especialistas en mecánica de suelos. (Juárez y Rico, 1979).

Para más información sobre la interfase del software, consulte las referencias siguientes: Ribó, *et al.*, 2003 (sobre GiD); Esqueda, H., 2004; y Botello, *et al.*, 2003.

CONCLUSIONES

1. Se ha obtenido un modelo numérico simple para el análisis de cimentaciones por el método de los ele-

mentos finitos, junto con un programa ejecutable que funciona dentro de un entorno gráfico amigable y fácil de utilizar. Gran parte de sus ventajas radican precisamente en su simpleza, frente a modelos más complicados y poco adecuados para suelos, o modelos más reales pero computacionalmente más caros. El modelo puede utilizarse bajo diferentes esquemas de solución a sistemas no lineales de ecuaciones. Este trabajo puede ser muy útil como material didáctico y técnico sobre la programación del MEF y su introducción a los problemas no lineales, en uno de los lenguajes más populares y robustos que existen: el C++.

2. Este modelo numérico puede ser muy útil para la simulación numérica de cimentaciones superficiales bajo cargas de servicio. No puede predecirse la carga última que puede aplicarse en una cimentación, pues es incapaz de reproducir los mecanismos de falla generales que gobiernan la capacidad de carga última de las cimentaciones. Sin embargo, nos permite inspeccionar los estados de esfuerzos y deformaciones de una cimentación y el

suelo en que se apoya de manera rápida y visual bajo condiciones de servicio, proporcionando una idea muy clara del comportamiento mecánico real de la cimentación. Con él puede obtenerse una aproximación muy buena de los asentamientos inmediatos que se producen en las cimentaciones.

3. Las técnicas numéricas necesarias para el manejo de la teoría de los grandes desplazamientos, técnicas de remallado, manejo de superficies deslizantes y contacto de materiales, así como el uso de ecuaciones constitutivas más sofisticadas que permitan atacar el problema de la consolidación quedan como trabajo futuro.

AGRADECIMIENTOS

El primer y segundo autores agradecen el apoyo del proyecto CONACYT No. P40721-Y para la realización de este trabajo. Así mismo, se agradecen los comentarios de los árbitros anónimos que han ayudado al enriquecimiento de este artículo.

REFERENCIAS

- Botello, S., Esqueda, H., Gómez, F., Moreles, M., Oñate, E. (2003). *MEFI 1.0. Módulo de aplicaciones del método de los elementos finitos*. U. de Gto, CIMAT A.C., CIMNE. http://www.cimat.mx/info_general/cimat/Software/Info.php?m=1&ind=7
- Bathe, K. J., (1982) *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall.
- Cook, R., Malkus, D.S. y Plesha, M.E. (1989) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3ed. John Wiley & Sons.
- Dahlquist, G. y Björk, A., (1974). *Numerical Methods*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall.
- Esqueda, H., (2004) *Modelos Numéricos de la Interacción Suelo-Estructura por el Método de los Elementos Finitos*. Tesis profesional *Cum-Laude*. Universidad de Guanajuato. Facultad de Ingeniería Civil.
- Juárez Badillo, E., y Rico Rodríguez, A. (1974) *Mecánica de Suelos*. Tomo 1. Fundamentos de la Mecánica de Suelos. 3ª ed. México. Limusa.
- Juárez Badillo, E., y Rico Rodríguez, A. (1979) *Mecánica de Suelos*. Tomo 2. Teoría y aplicaciones de la Mecánica de Suelos. 2ª ed. México. Limusa.
- Malvern L.E. (1969.) *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs New Jersey.
- Oñate, E. (1995) *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal*. 2ª ed. Barcelona. CIMNE.
- Oñate, E., y Botello, S., (1995) “*Modelización de problemas de gran tamaño en el sector transporte, utilizando métodos numéricos y supercomputadoras*”. *Acta Universitaria*, Vol. 5:1, 15-25
- Ralston, A., (1970) *Introducción al análisis numérico*. Limusa-Wiley.
- Ribó, R., Riera, M., Escolano, M., Pérez, J.S., Font, L., Güeto, E., (2003) *GID7.4, The Personal Pre and Postprocessor*, CIMNE <http://www.gidhome.com/>
- Timoshenko, S.P. y Goodier, J.N. (1968). *Teoría de la Elasticidad*. Ediciones Urmo,.
- Yang, T.Y., (1986) *Finite Element Structural Análisis*. Prentice Hall.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994) *El Método de los Elementos Finitos* Cuarta Edición, Volumen 2, Mc. Graw Hill-CIMNE.