

Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante

Power operator as witness of the decoherence in the execution of the Toffoli gate in a diamond quantum computer

Fabián Soberanes¹, Manuel Ávila²

¹ Tecnológico de Estudios Superiores de Chalco (Tesch), Tlapala, C.P. 56600, Chalco, Estado de México, México.

*Correo electrónico: fabiansob@hotmail.com

² Centro Universitario, Campus Valle de Chalco, Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), Ma. Isabel, CP 56615, Valle de Chalco, Estado de México, México.

*Autor de correspondencia

Resumen

La computadora cuántica de diamante ha sido empleada exitosamente en diversos protocolos de información cuántica. Es usado un Hamiltoniano (H) típico de 3-qubits que componen una computadora cuántica de diamante, el cual consiste de términos diagonales y pulsos de Rabi que generan el giro de los espines de la compuerta de Toffoli. De tal Hamiltoniano es derivado el operador potencia dH/dt y calculado su valor promedio como función del tiempo. Al resolver numéricamente la ecuación de Schroedinger, se demuestra que la compuerta de Toffoli no se ejecuta y que el operador potencia es testigo de la decoherencia de la ejecución de la compuerta Toffoli. Al depender el Hamiltoniano del tiempo, hay un intercambio de energía del sistema de tres qubits con el medio. Lo anterior induce la decoherencia del sistema. Se concluye que la tecnología de pulsos de Rabi tiene limitaciones.

Palabras clave: Compuerta de Toffoli; qubits; ejecución; operador potencia.

Abstract

The diamond quantum computer has been employed successfully for several quantum information protocols. A Hamiltonian (H), 3-qubits typical diamond quantum computer is used, consisting of diagonal terms and Rabi pulses that generate the spin flit of the Toffoli gate. From such a Hamiltonian, the respective power operator dH/dt is derived and its average behavior as a function of time is calculated. To solve numerically the Schroedinger equation, it is shown both that the Toffoli gate is not executed and that the power operator is witness of the decoherence of the execution of the Toffoli gate. When the Hamiltonian depends on time, there is exchange of energy of the 3-qubit system with the environment. The latter induces decoherence of the system. It is also concluded that the Rabi pulses technology has limitations.

Keywords: Toffoli gate; qubits; execution; power operator.

Recibido: 15 de octubre de 2018

Aceptado: 15 de agosto de 2019

Publicado: 6 de noviembre de 2019

Como citar: Soberanes, F., & Ávila, M. (2019). Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante. *Acta Universitaria* 29, e2409. doi. <http://doi.org/10.15174/au.2019.2409>

Introducción

La así llamada compuerta cuántica de Toffoli (denotada por $CCNOT$) (Nielsen & Chuang, 2000) fue descubierta por Tommaso Toffoli (1980b) y es una compuerta lógica universal reversible. El que sea reversible significa que existe su operación inversa; esto es, existe $CCNOT^{-1}$ tal que $CCNOT \times CCNOT^{-1} = 1$. El que sea universal quiere decir que cualquier circuito reversible puede ser descompuesto en términos de compuertas de Toffoli (de Bakker & van Leeuwen, 1980a). Su representación matricial es la siguiente:

$$CCNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Hay que observar de la ecuación (1) que la compuerta de Toffoli coincide con su inversa, es decir, $CCNOT = CCNOT^{-1}$. La compuerta $CCNOT$ opera sobre estados de tres qubits y es tal que solo cambia el tercer qubit solo si los dos qubits de control son 1, esto es:

$$\begin{aligned} CCNOT|000\rangle &= |000\rangle, \\ CCNOT|001\rangle &= |001\rangle, \\ CCNOT|010\rangle &= |010\rangle, \\ CCNOT|100\rangle &= |100\rangle, \\ CCNOT|011\rangle &= |011\rangle, \\ CCNOT|101\rangle &= |101\rangle, \\ CCNOT|111\rangle &= |110\rangle. \\ CCNOT|110\rangle &= |111\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

La compuerta de Toffoli ha sido estudiada intensivamente en Información Cuántica (Barenco *et al.*, 1995), también ha sido estudiada experimentalmente a través de la técnica de átomos neutros (Jeongwan & Matthew, 2018; Lloyd & Terhal, 2016; Shi, 2018) donde los momentos angulares de espín juegan un papel central. Por otra parte, ha sido implementada experimentalmente a través de la técnica de iones atrapados (Monz *et al.*, 2009).

La computadora cuántica de diamante es un prometedor dispositivo para hacer las funciones de una computadora cuántica operativa. La red cristalina de diamante se calienta y se bota un átomo de carbono, quedando un hueco o vacante que, junto con un átomo de nitrógeno, forman un centro nitrógeno-vacante (NV) que, en lugar de contener dos átomos de carbono, contiene un átomo de nitrógeno y una vacante. El centro NV define un qubit, ya que tiene una carga eléctrica -1 y dos valores de espín que es $\frac{1}{2}$ para Nitrógeno-15 inmerso en átomos de Carbono-13, tal como es ilustrado en la figura 1. La computadora cuántica de diamante ha sido propuesta en criptografía cuántica (Dynes *et al.*, 2009). En 2006, se propuso que los centros NV fueran pensados como qubits (Gaebel *et al.*, 2006). Un comportamiento

interesante es que la dinámica entre el espín electrónico y el espín nuclear de átomos de Carbono-13 cercanos al centro NV están protegidos por la decoherencia, razón por la cual se les puede considerar una memoria cuántica (Gurudev *et al.*, 2007). En este punto vale la pena preguntarse ¿qué tan eficiente es la computadora cuántica de diamante para ejecutar la compuerta de *CCNOT* dada por la ecuación (1)? En el presente trabajo se propone un Hamiltoniano H de tres centros NV sobre los cuales actúa un campo magnético, tal como lo ilustra la figura 1, sometidos a pulsos de Rabi que cambian el espín de cada uno de los tres qubits. Se resuelve la respectiva ecuación de Schroedinger y se calcula el respectivo operador potencia dH/dt . Se verifica que el operador potencia es testigo de la decoherencia que impide la ejecución de la compuerta de Toffoli. El manuscrito está organizado de la siguiente manera. Primero, se propone el modelo; luego, se calcula el operador potencia para, posteriormente, verificar que este es testigo de que la compuerta *CCNOT* no se ejecuta eficientemente; finalmente, se da una discusión de los resultados obtenidos.

Materiales y Métodos

La investigación fue de tipo cualitativo y se utilizó la técnica de análisis de contenido, teniendo como objeto de estudio los mensajes publicitarios de los programas y campañas de prevención del sobrepeso y la obesidad. A partir de una revisión en línea de material bibliográfico y de documentos oficiales, se hizo una selección de los programas y campañas de prevención de sobrepeso y obesidad que cumplieran con los siguientes criterios de búsqueda: estuvieran dirigidos a la población en general, tuvieran cobertura nacional, pertenecieran o estuvieran en convenio con la Secretaría de Salud (SS), implementados entre 2008 y 2013, y con una permanencia de al menos tres años.

En total fueron cinco los programas o campañas que cumplieron tales criterios (tabla 1): cinco pasos para la salud; chécate, mídete y muévete; cinco pasos en 11 jugadas para tu salud; lucha libre contra la obesidad; y semáforo de la alimentación (Asistencia, Asesoría y Administración de Espectáculos [AAA], 2013; Federación Mexicana de Fútbol [Femexfut], 2014; Instituto Mexicano del Seguro Social [IMSS], 2015; Secretaría de Salud del Distrito Federal [Sedesal], 2013; Secretaría de Salud [SS], 2013).

Se llevó a cabo un análisis de contenido de los mensajes publicitarios identificados. El análisis de contenido es una técnica cualitativa que permite examinar documentos en diferentes sentidos. Uno de ellos es el semántico, que busca el sentido de las palabras, temas y categorías propuestas (Amezcuca & Gálvez, 2002). Se consideraron como unidad base las frases publicitarias de los mensajes y se categorizaron de acuerdo a quiénes van dirigidas, qué promueven y si hacen referencia de la gravedad. En el caso de tener imágenes, se examinaron cuáles eran las características corporales que definían a la obesidad y al cuerpo saludable.

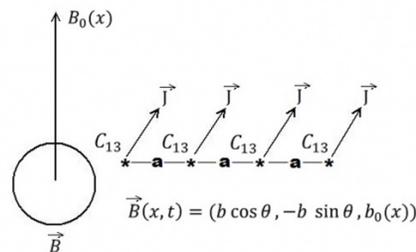


Figura 1. Centros Vacante-Nitrogeno (VN) en los átomos del diamante. Cada centro es un qubit, el cual es sometido a un campo magnético $\vec{B}(x, t)$. Observe que $\theta = \omega t + \varphi$, donde ω es la frecuencia de Larmor y φ es una fase arbitraria. La separación entre cada qubit V es a . J ' es el momento angular del espín de cada qubit.

Fuente: Elaboración propia.

El modelo

Se propone un Hamiltoniano para tres centros NV como sigue:

$$\hat{H} = - \left\{ \hbar \sum_{k=1}^3 w_k S_k^z - J \sum_{k=1}^3 S_k^z S_{k+1}^z - J' \sum_{k=1}^3 S_k^z S_{k+2}^z + \frac{\Omega}{2} \sum_{k=1}^3 (e^{i\theta_k} S_k^- + e^{-i\theta_k} S_k^+) \right\}, \quad (3)$$

donde se elige un sistema de unidades tal que $\hbar = 1$, w_k son las frecuencias de Larmor, S_k^z es la componente z del espín del k-esimo qubit, J, J' son constantes de acoplamiento, Ω es la frecuencia de Rabi, $\theta_k = w_k t + \varphi_k$ (φ_k es una fase arbitraria) y S_k^- (S_k^+) son los operadores descenso (ascenso). Los índices de suma en la ecuación anterior deben llevar $\text{mod}(k+1,3), \text{mod}(k+2,3)$. Los operadores de ascenso y descenso son tales que $S^-|0\rangle = |1\rangle, S^-|1\rangle = 0, S^+|0\rangle = 0, S^+|1\rangle = |0\rangle$. El término proporcional a J representa la interacción a primeros vecinos, el término proporcional a J' representa la interacción a segundos vecinos. El último sumando en la ecuación (1) son los pulsos de Rabi que describen interacciones a bajas energías de los tres fermiones con fotones que sirven como spin flip de los fermiones. La interacción de Rabi es necesaria para ejecutar la compuerta de Toffoli, donde los espines cambian de dirección bajo la acción de la compuerta.

Ecuación de Schroedinger

En orden de simular la compuerta de Toffoli, se resuelve la ecuación de Schroedinger asociada al Hamiltoniano de la ecuación (1). Para ello, hay que observar primero que el estado de tres qubits más general es el siguiente:

$$|\psi(t)\rangle = C_0(t)|000\rangle + C_1(t)|001\rangle + C_2(t)|010\rangle + C_3(t)|011\rangle + C_4(t)|100\rangle + C_5(t)|101\rangle + C_6(t)|110\rangle + C_7(t)|111\rangle = C_0(t)|0\rangle + C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle + C_3(t)|3\rangle + C_4(t)|4\rangle + C_5(t)|5\rangle + C_6(t)|6\rangle + C_7(t)|7\rangle, \quad (4)$$

donde en la ecuación anterior se ha empleado la notación decimal, los coeficientes $C_i(t)$ son números complejos que satisfacen

$$\sum_{i=0}^7 |C_i(t)|^2 = 1, \quad (5)$$

para todo tiempo (t). La respectiva ecuación de Schroedinger es:

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle. \quad (6)$$

Substituyendo (4) en (6), es inmediato concluir que la ecuación de Schroedinger se convierte en un sistema de ocho ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, dado por:

$$\frac{d}{dt} C_0(t) = -i \left[(-\hbar(w_1 + w_2 + w_3) + 2J + J') C_0 - \frac{\Omega}{2} (e^{i\theta_1} C_1 + e^{i\theta_2} C_2 + e^{i\theta_3} C_4) \right],$$

$$\frac{d}{dt} C_1(t) = -i \left[(-\hbar(-w_1 + w_2 + w_3) + J') C_1 - \frac{\Omega}{2} (e^{-i\theta_1} C_0 + e^{i\theta_2} C_3 + e^{i\theta_3} C_5) \right],$$

$$\frac{d}{dt} C_2(t) = -i \left[(-\hbar(+w_1 - w_2 + w_3) - 2J + J') C_2 - \frac{\Omega}{2} (e^{i\theta_1} C_3 + e^{-i\theta_2} C_0 + e^{i\theta_3} C_6) \right],$$

$$\frac{d}{dt} C_3(t) = -i \left[(-\hbar(-w_1 - w_2 + w_3) - J') C_3 - \frac{\Omega}{2} (e^{-i\theta_1} C_2 + e^{-i\theta_2} C_1 + e^{i\theta_3} C_7) \right],$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C_4(t) &= -i \left[(-\hbar(w_1 + w_2 - w_3) - J')C_4 - \frac{\Omega}{2}(e^{i\theta_1}C_5 + e^{i\theta_2}C_6 + e^{-i\theta_3}C_0) \right], \\ \frac{d}{dt}C_5(t) &= -i \left[(-\hbar(-w_1 + w_2 - w_3) - 2J + J')C_5 - \frac{\Omega}{2}(e^{-i\theta_1}C_4 + e^{i\theta_2}C_7 + e^{-i\theta_3}C_1) \right], \\ \frac{d}{dt}C_6(t) &= -i \left[(-\hbar(w_1 - w_2 - w_3) - J')C_6 - \frac{\Omega}{2}(e^{i\theta_1}C_7 + e^{-i\theta_2}C_4 + e^{-i\theta_3}C_2) \right], \\ \frac{d}{dt}C_7(t) &= -i \left[(-\hbar(-w_1 - w_2 - w_3) + 2J + J')C_7 - \frac{\Omega}{2}(e^{-i\theta_1}C_6 + e^{-i\theta_2}C_5 + e^{-i\theta_3}C_3) \right].\end{aligned}\tag{7}$$

Los valores de las constantes son $\sigma = 0.1$ y $B_0 = 0.7 T$, siendo las frecuencias de Larmor $w_1 = \sigma B_0$, $w_2 = \sigma w_1$ y $w_3 = \sigma w_2$, mientras que las constantes de acoplamiento son $J = 0.01$ y $J' = \frac{J}{8}$ y, finalmente, la frecuencia de Rabi es $\Omega = 0.01$.

En el presente trabajo se resolverá la ecuación (7) usando las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}C_0(t = 0) &= 0, \\ C_1(t = 0) &= 0, \\ C_2(t = 0) &= 0, \\ C_3(t = 0) &= 0, \\ C_4(t = 0) &= 0, \\ C_5(t = 0) &= 0, \\ C_6(t = 0) &= 1, \\ C_7(t = 0) &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

De la ecuación (2) se puede observar que las transiciones *CCNOT* son las siguientes:

$$\begin{aligned}|000\rangle &\rightarrow |000\rangle, \\ |001\rangle &\rightarrow |001\rangle, \\ |010\rangle &\rightarrow |010\rangle, \\ |011\rangle &\rightarrow |011\rangle, \\ |100\rangle &\rightarrow |100\rangle, \\ |101\rangle &\rightarrow |101\rangle, \\ |110\rangle &\rightarrow |111\rangle, \\ |111\rangle &\rightarrow |110\rangle.\end{aligned}$$

Luego entonces, de las ecuaciones (4) y (7) se puede observar que idealmente la compuerta Toffoli se ejecuta si existe un tiempo (T), tal que

$$|c_0(0)|^2 = |c_0(T)|^2 = 0,$$

$$|c_1(0)|^2 = |c_1(T)|^2 = 0,$$

$$|c_2(0)|^2 = |c_2(T)|^2 = 0,$$

$$|c_3(0)|^2 = |c_3(T)|^2 = 0,$$

$$|c_4(0)|^2 = |c_4(T)|^2 = 0,$$

$$|c_5(0)|^2 = |c_5(T)|^2 = 0,$$

$$|c_6(T)|^2 = 0,$$

$$|c_7(T)|^2 = 1. \tag{9}$$

La situación ideal anterior se bosqueja en la figura 2.

Operador potencia y solución de la ecuación de Schroedinger

Resolviendo la ecuación de Schroedinger dada por la ecuación (7), sujeto a las condiciones iniciales (ecuación [8]), se obtiene la solución ilustrada en la figura 3. De dicha figura se puede observar que la situación ideal de la figura 2 no se cumple.

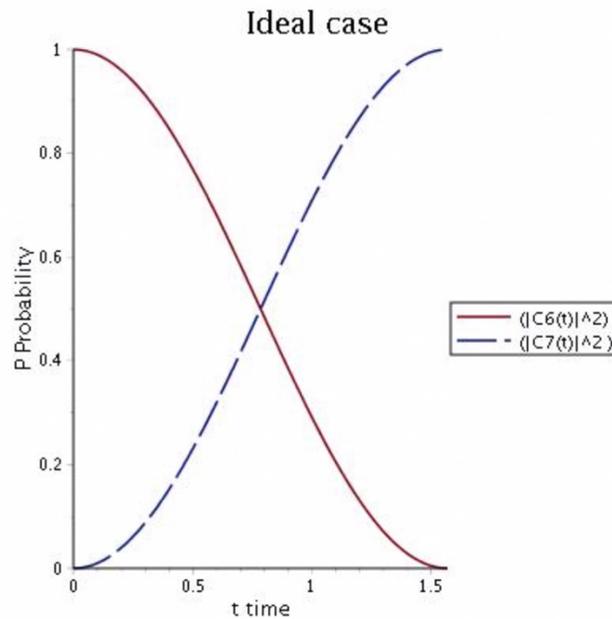


Figura 2. Situación ideal donde se ejecuta la compuerta $CCNOT$. Esto es, $C_6(t=0) = 1$, $C_7(t=0) = 1$, $|c_6(T)|^2 = 0$ y $|c_7(T)|^2 = 1$.
Fuente: Elaboración propia.

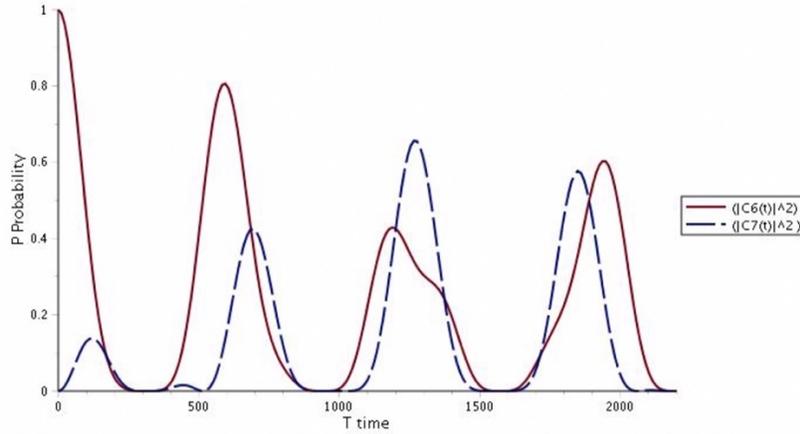


Figura 3. Solución de la ecuación de Schroedinger dada por el sistema de ecuaciones (7) sujeta a las condiciones iniciales de las ecuaciones (8).
Fuente: Elaboración propia.

De la ecuación (3) se puede observar que el Hamiltoniano depende del tiempo; entonces, es posible calcular el operador potencia, el cual está dado por

$$\hat{P} = \text{Operador potencia} = \frac{d\hat{H}}{dt} =$$

$$\frac{\Omega}{2} \left\{ \left(\frac{d}{dt} e^{i\theta} \right) S_1^- + \left(\frac{d}{dt} e^{-i\theta} \right) S_1^+ + \left(\frac{d}{dt} e^{i\theta_2} \right) S_2^- + \left(\frac{d}{dt} e^{-i\theta_2} \right) S_2^+ + \left(\frac{d}{dt} e^{i\theta_3} \right) S_3^- + \left(\frac{d}{dt} e^{-i\theta_3} \right) S_3^+ \right\}.$$

Dado que

$$\theta_k = w_k t + \mu_k,$$

$$\frac{d}{dt} e^{i\theta_k} = i w_k e^{i\theta_k},$$

entonces el operador potencia será

$$\hat{P} = \frac{\Omega i}{2} \left\{ (w_1 e^{i\theta}) S_1^- - (w_1 e^{-i\theta}) S_1^+ + (w_2 e^{i\theta_2}) S_2^- - (w_2 e^{-i\theta_2}) S_2^+ + (w_3 e^{i\theta_3}) S_3^- - (w_3 e^{-i\theta_3}) S_3^+ \right\}. \quad (10)$$

Con el propósito de dar una estimación del valor físico del operador potencia, en el presente trabajo se calcula la potencia promedio, la cual está dada por

$$\langle P(t) \rangle = \langle \psi(t) | P | \psi(t) \rangle = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 C_i^*(t) C_j(t) \left\langle i \left| \frac{d\hat{H}}{dt} \right| j \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle = & \frac{\Omega i}{2} \left\{ -C_0^*(t) C_1(t) w_1 e^{-i\theta} - C_0^*(t) C_2(t) w_2 e^{-i\theta_2} - C_0^*(t) C_4(t) w_3 e^{-i\theta_3} + \right. \\ & C_1^*(t) C_0(t) w_1 e^{i\theta} - C_1^*(t) C_3(t) w_2 e^{-i\theta_2} - C_1^*(t) C_3(t) w_3 e^{-i\theta_3} + \\ & C_2^*(t) C_0(t) w_2 e^{i\theta_2} - C_2^*(t) C_3(t) w_1 e^{-i\theta} - C_2^*(t) C_6(t) w_3 e^{-i\theta_3} + C_3^*(t) C_1(t) w_2 e^{i\theta_2} + C_3^*(t) C_2(t) w_1 e^{i\theta} - C_3^*(t) C_7(t) w_3 e^{-i\theta_3} + \\ & C_4^*(t) C_0(t) w_3 e^{i\theta_3} - C_4^*(t) C_5(t) w_1 e^{-i\theta} - C_4^*(t) C_6(t) w_3 e^{-i\theta_2} + C_5^*(t) C_1(t) w_3 e^{i\theta_3} + C_5^*(t) C_4(t) w_1 e^{i\theta} - C_5^*(t) C_7(t) w_2 e^{-i\theta_2} + \\ & \left. C_6^*(t) C_2(t) w_3 e^{i\theta_3} + C_6^*(t) C_4(t) w_2 e^{i\theta_2} - C_6^*(t) C_7(t) w_1 e^{-i\theta} + C_7^*(t) C_3(t) w_3 e^{i\theta_3} + C_7^*(t) C_5(t) w_2 e^{i\theta_2} + C_7^*(t) C_6(t) w_1 e^{i\theta} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

Donde se ha usado la ecuación (4) y los coeficientes $C_j(t)$ de la ecuación (10), son las soluciones de la ecuación de Schroedinger dada por el sistema de ecuaciones (7). La gráfica de la ecuación anterior como

función del tiempo es mostrada en la figura 4. En el Apéndice se deriva la ecuación (11) de manera explícita. Como se puede apreciar de las figuras 3 y 4, el operador potencia (que representa intercambio de energía con los alrededores) es testigo de la decoherencia que hace que la compuerta de Toffoli no se ejecute.

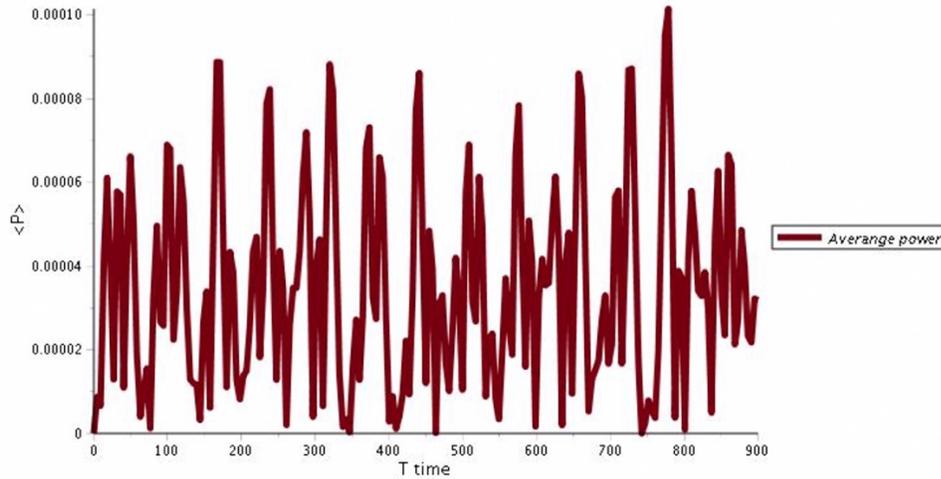


Figura 4. Potencia promedio de la Ecuación (11) como función del tiempo.
Fuente: Elaboración propia.

Resultados

El operador potencia es testigo de la decoherencia en la no ejecución de la compuerta de Toffoli por una computadora cuántica de diamante de tres qubits.

Discusión

Los pulsos de Rabi en el Hamiltoniano (ecuación (3)) hacen que la computadora cuántica de diamante se vea sometida a un baño de fotones que hacen que el indeseable ruido se haga presente. Es decir, hay un intercambio de energía con los alrededores; por lo tanto, la energía del sistema de tres qubits no se conserva. Hay potencia disipada que hace que las señales de los tres qubits se enturbien. Para mejorar la tecnología es necesario implementar una reingeniería donde se introduzcan qubits físicos que protejan los qubits lógicos. Lo anterior haría la computadora cuántica de diamante operativa.

Amenazas

Externas: El baño térmico en el que está sumergido el sistema de tres qubits.

Internas: La dependencia en el tiempo intrínseca del Hamiltoniano que describe la interacción interna de los tres qubits.

Conclusiones

La computadora cuántica de diamante ha sido empleada satisfactoriamente en muchos protocolos de información cuántica. No obstante, se ha presentado una situación muy particular donde la compuerta

CCNOT no se ejecuta. Lo anterior sugiere que los pulsos de Rabi son una tecnología con limitaciones. Esto se debe a que, en la compuerta de Toffoli, el tercer qubit gira su espín, por lo que la conservación del momento angular requiere que haya interacción de un fotón con el tercer qubit. Esto quiere decir que la interacción dependiente del tiempo qubit-fotón sea necesaria y no se pueda evitar.

Apéndice

En las siguientes ecuaciones se describe el valor obtenido al aplicar el operador potencia de la Ecuación (10) a los estados de tres qubits.

$$\hat{P}|000\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|001\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|0\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|010\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|0\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|100\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|0\rangle \}$$

$$\hat{P}|001\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|0\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|000\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|011\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|0\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|101\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|0\rangle \}$$

$$\hat{P}|010\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|011\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|0\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|0\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|000\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|110\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|0\rangle \}$$

$$\hat{P}|011\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|0\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|010\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|0\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|001\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|111\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|0\rangle \}$$

$$\hat{P}|100\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|101\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|0\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|110\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|0\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|0\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|000\rangle \}$$

$$\hat{P}|101\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|0\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|100\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|111\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|0\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|0\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|001\rangle \}$$

$$\hat{P}|110\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|111\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|0\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|0\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|100\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|0\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|010\rangle \}$$

$$\hat{P}|111\rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ (w_1 e^{i\theta})|0\rangle - (w_1 e^{-i\theta})|110\rangle + (w_2 e^{i\theta_2})|0\rangle - (w_2 e^{-i\theta_2})|101\rangle + (w_3 e^{i\theta_3})|0\rangle - (w_3 e^{-i\theta_3})|011\rangle \}$$

En las ecuaciones siguientes se calculan los valores promedio del operador potencia de la ecuación (10).

$$\sum_{j=0}^7 C_0^*(t) C_j(t) \langle 000 | \hat{P} | j \rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ -C_0^*(t) C_1(t) w_1 e^{-i\theta} - C_0^*(t) C_2(t) w_2 e^{-i\theta_2} - C_0^*(t) C_4(t) w_3 e^{-i\theta_3} \}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_1^*(t) C_j(t) \langle 001 | \hat{P} | j \rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ C_1^*(t) C_0(t) w_1 e^{i\theta} - C_1^*(t) C_3(t) w_2 e^{-i\theta_2} - C_1^*(t) C_5(t) w_3 e^{-i\theta_3} \}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_2^*(t) C_j(t) \langle 010 | \hat{P} | j \rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ C_2^*(t) C_0(t) w_2 e^{i\theta_2} - C_2^*(t) C_3(t) w_1 e^{-i\theta} - C_2^*(t) C_6(t) w_3 e^{-i\theta_3} \}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_3^*(t) C_j(t) \langle 011 | \hat{P} | j \rangle = \frac{\Omega i}{2} \{ C_3^*(t) C_1(t) w_2 e^{i\theta_2} + C_3^*(t) C_2(t) w_1 e^{i\theta} - C_3^*(t) C_7(t) w_3 e^{-i\theta_3} \}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_4^*(t)C_j(t)\langle 100|\hat{P}|j\rangle = \frac{\Omega i}{2}\{C_4^*(t)C_0(t)w_3e^{i\theta_3} - C_4^*(t)C_5(t)w_1e^{-i\theta} - C_4^*(t)C_6(t)w_3e^{-i\theta_2}\}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_5^*(t)C_j(t)\langle 101|\hat{P}|j\rangle = \frac{\Omega i}{2}\{C_5^*(t)C_1(t)w_3e^{i\theta_3} + C_5^*(t)C_4(t)w_1e^{i\theta} - C_5^*(t)C_7(t)w_2e^{-i\theta_2}\}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_6^*(t)C_j(t)\langle 110|\hat{P}|j\rangle = \frac{\Omega i}{2}\{C_6^*(t)C_2(t)w_3e^{i\theta_3} + C_6^*(t)C_4(t)w_2e^{i\theta_2} - C_6^*(t)C_7(t)w_1e^{-i\theta}\}$$

$$\sum_{j=0}^7 C_7^*(t)C_j(t)\langle 111|\hat{P}|j\rangle = \frac{\Omega i}{2}\{C_7^*(t)C_3(t)w_3e^{i\theta_3} + C_7^*(t)C_5(t)w_2e^{i\theta_2} + C_7^*(t)C_6(t)w_1e^{i\theta}\}$$

Agradecimientos

Fabian Soberanes agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca doctoral.

Referencias

- Barenco, A., Bennett, C. H., Cleve, R., DiVincenzo, D. P., Margolus, N., Shor, P., Sleator, T., Smolin, J. A., & Weinfurter, H. (1995). Elementary gates for quantum computation. *Physical Review*, 52(5), 3457–3467. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457>
- Dynes, J. F., Takesue, H., Yuan, Z. L., Sharpe, A. W., Harada K., Honjo T., Kamada, H. H., Tadanaga, O., Nishida, Y., Asohe, M., & Shields, A. J. (2009). Efficient entanglement distribution over 200 kilometers. *Optics Express*, 17(14), 11440-11449. doi: <https://doi.org/10.1364/OE.17.011440>
- Gaebel, T., Domhan, M., Popa, I., Wittmann, C., Neumann, P., Jelezko, F., Rabeau, J.R., Stavrias, N., Greentree, A. D., Prawer, S., Meijer, J., Twamley, J., Hemmer, P. R., & Wrachtrup, J. (2006). Room-temperature coherent coupling of single spins in diamond. *Nature Physics*, 2, 408-413. doi: <https://doi.org/10.1038/nphys318>
- Gurudev Dutt, M. V., Childress, L., Jiang, L., Togan, E., Maze, J., Jelezko, F., Zibrov, A. S., Hemmer, P. R., & Lukin, M. D. (2007). Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond. *Science*, 316(5829), 1312-1316. doi: <https://doi.org/10.1126/science.1139831>
- Jeongwan, H., & Matthew, B. H. (2018). Codes and Protocols for Distilling T, controlled-S, and Toffoli Gates. *Quantum*, 2, 71-99. doi: <https://doi.org/10.22331/q-2018-06-07-71>
- Lloyd, S., & Terhal, B. (2016). Adiabatic and Hamiltonian computing on a 2D lattice with simple two-qubit interactions. *New Journal of Physics*, 18, 1-16. doi: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/2/023042>
- Monz, T., Kim, K., Hänse, W., Riebe, M., Villar, A. S., Schindler, P., Chwalla, M., Hennrich, M., & Blatt, R. (2009). Realization of the Quantum Toffoli Gate with Trapped Ions. *Physical Review Letters* 102(4), 040501-040504. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.040501>
- Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2000) *Quantum Computation and Quantum Information*. New York: Cambridge University Press.
- Toffoli, T. (1980a) Reversible computing. En: J. W. De Bakker, & J. Van Leeuwen (Eds.). *Automata, Languages and Programming. ICALP*. (pp. 632–644).
- Toffoli, T. (1980b) *Technical report*, MIT/LCS/TM-15.
- Shi, X. (2018). Deutsch, Toffoli, and CNOT Gates via Rydberg Blockade of Neutral Atoms. *Physical Review Applied*, 9(5), 051001-051006. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.9.051001>