

Modelo optimizado para cabezales rectangulares apoyados sobre un grupo de pilotes: Parte 1) Superficie óptima

An optimized model for rectangular pile caps supported on a group of piles:
Part 1) Optimum surface

Oscar Mario Farias Montemayor¹, Arnulfo Luévanos Rojas^{1*}, Sandra López Chavarría¹, Manuel Medina Elizondo¹

¹Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias, Universidad Autónoma de Coahuila. Blvd. Revolución 151 Ote. Torreón, Coahuila, México. CP 27000. Correo electrónico: arnulfol_2007@hotmail.com.

*Autor de correspondencia

Resumen

Este documento muestra un modelo optimizado para cabezales o zapatas rectangulares apoyadas sobre un grupo de pilotes, con el fin de obtener el área de la superficie mínima en planta que soporta una carga axial y dos momentos en dirección del eje X y Y debido a una columna. Este modelo asume que los cabezales son perfectamente rígidos y los pilotes están articulados en la unión de los cabezales con los pilotes y, por lo tanto, los pilotes transmiten solamente carga vertical. La metodología normalmente utilizada para obtener el área de la superficie en planta de los cabezales se propone de acuerdo con la distribución de los pilotes, tomando en cuenta las especificaciones marcadas por los códigos de construcción. También, cinco tipos de cabezales apoyadas sobre un grupo formado por dos, tres, cuatro, cinco y seis pilotes se muestran para demostrar la exactitud del modelo presentado en este documento.

Palabras clave: Modelo optimizado; cabezales o zapatas rectangulares; superficie mínima; grupo de pilotes.

Abstract

This paper shows an optimized model for rectangular pile caps, or footings, supported on a group of piles to obtain the minimum surface area in plant, supporting an axial load and two moments in the direction of the X and Y axis due to a column. This model assumes that the caps are perfectly rigid, and the piles are articulated at the junction of the caps with the piles; therefore, the piles transmit only vertical load. The methodology normally used to obtain the surface area of the caps is proposed in accordance to the distribution of the piles, taking the specifications set by the building codes into account. Also, five types of caps supported on a group formed by two, three, four, five and six piles are shown to demonstrate the accuracy of the model presented.

Keywords: Optimized model; rectangular pile caps or footings; minimum surface; group of piles.

Recibido: 20 de diciembre de 2018

Aceptado: 15 de mayo de 2020

Publicado: 10 de junio de 2020

Como citar: Farias Montemayor, O. M., Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., & Medina Elizondo, M. (2020). Modelo optimizado para cabezales rectangulares apoyados sobre un grupo de pilotes: Parte 1) Superficie óptima. *Acta Universitaria* 30, e2465. doi: <http://doi.org/10.15174/au.2020.2465>

Introducción

La cimentación es una parte estructural que se localiza por debajo de la superficie del suelo y que transmite las cargas de la estructura al suelo o roca subyacentes. Todos los suelos, al someterlos a las cargas, se comprimen y causan asentamientos en la estructura soportada. Los dos requisitos principales en el diseño de cimentaciones son: 1) que el asentamiento total de la estructura esté restringida a una cantidad tolerablemente pequeña; 2) que el asentamiento diferencial de las distintas partes de la estructura se elimine.

La figura 1 muestra los tipos de cimentaciones.

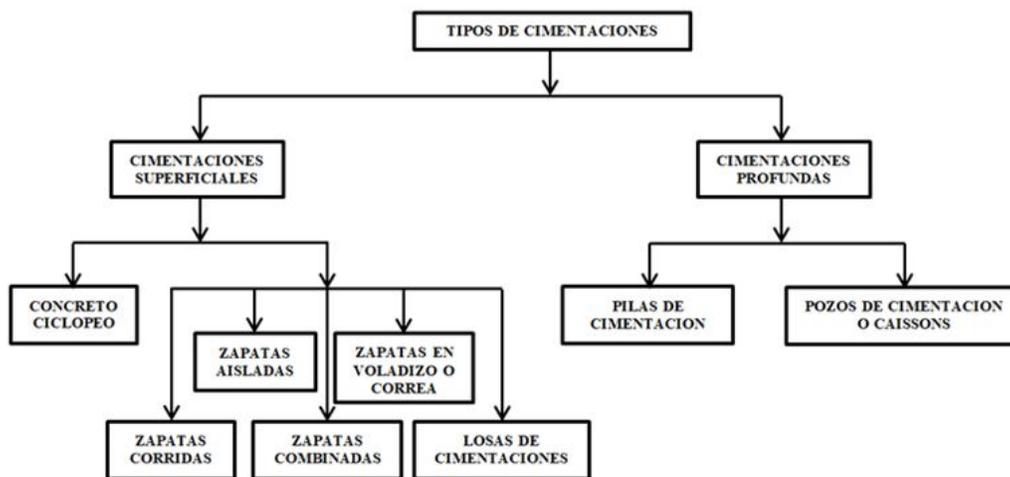


Figura 1. Clasificación de las cimentaciones.
Fuente: Elaboración propia.

Las cargas que bajan de la estructura a las cimentaciones superficiales descansan directamente sobre el suelo; y en las cimentaciones profundas, las cargas que provienen de la estructura descansan sobre la tapa, o cabezal, de los pilotes, o zapatas, que a su vez se transmiten a los pilotes.

Las cimentaciones superficiales se desplantan sobre estratos superficiales, o poco profundos del suelo, por tener una capacidad de carga del suelo adecuada para soportar las cargas que bajan de la estructura y los estratos más débiles subyacentes no producen un asentamiento indebido. Los sistemas de cimentaciones de poca profundidad son los sistemas de cimientos más económicos utilizados comúnmente.

Las cimentaciones de concreto ciclópeo soportan muros de mampostería y se componen de concreto simple y grandes piedras; no contiene acero de refuerzo.

Las zapatas corridas soportan muros. Estas son losas continuas a lo largo de un muro. Las zapatas aisladas soportan columnas individuales. Estas pueden ser cuadradas, rectangulares y circulares. Las zapatas combinadas soportan dos o más columnas. Estas pueden ser rectangulares, trapezoidales, en forma de T y L (esquineras) en planta. Las zapatas en voladizo o correa son similares a las zapatas combinadas, excepto que las zapatas debajo de las columnas se construyen de forma independiente y están unidas por una viga de correa o trabes de liga.

Las losas de cimentaciones son grandes zapatas continuas que soportan todas las columnas de la estructura. Esto se usa cuando las condiciones del suelo son pobres, pero no se usan pilas o pilotes.

Las cimentaciones profundas se utilizan para transferir cargas a un estrato más fuerte, que puede ubicarse a una profundidad significativa debajo de la superficie del suelo. Las cimentaciones superficiales pueden ser antieconómicas, incluso cuando la capacidad de carga del suelo cerca de la superficie de este es demasiado baja.

Los pilotes de cimentación son miembros estructurales que cuentan con una sección transversal pequeña en comparación con su longitud, los cuales transmiten las cargas que bajan de la estructura y de la misma cimentación (cabezales de pilotes o zapatas) al subsuelo, con el propósito de obtener la estabilidad del conjunto.

Los cabezales de pilotes son losas gruesas que se usan para unir un grupo de pilotes para soportar y transmitir cargas de columna a los pilotes.

Los pozos de cimentación o caissons son miembros estructurales que se presentan para resolver, de una manera económica, la cimentación de una estructura cuando el estrato firme se localiza a una profundidad mayor.

La optimización de las estructuras ha sido explorada por muchos investigadores en el pasado, las principales investigaciones son las siguientes: Optimización de diseño de edificios altos bajo criterios múltiples de diseño (Ng & Lam, 2005); Diseño óptimo de cimentaciones superficiales rectangulares; Formulación (Chagoyén, Negrín, Cabrera, López & Padrón, 2009); Optimización de costos de estructuras de acero industrial (Kravanja & Žula, 2010); Optimización del diseño del grupo de pilotes utilizando un enfoque genético real (Hwang, Lyu & Chung, 2011); Diseño óptimo de estructuras tridimensionales para techos (Tapia et al., 2012); Avances en la optimización de estructuras de edificios de gran altura (Aldwaik & Adeli, 2014); Optimización del diseño en armaduras (Pallares-Muñoz & Rodríguez-Calderón, 2014); Optimización de costos de las secciones T de concreto reforzado de alta resistencia en flexión (Tiliouine & Fedghouche, 2014); Diseño óptimo de cimentaciones superficiales poco profundas con suelos limosos (Hassaan, 2014); Diseño óptimo de estructuras de marco plano utilizando redes neuronales artificiales y variables de relación (Kao & Yeh, 2014); Aplicación del algoritmo genético en el diseño óptimo de la cimentación de tira (Hui, Zhuoyi & Mingji, 2015); Experimentación numérica para el diseño óptimo de vigas rectangulares de concreto reforzado para secciones simplemente reforzadas (Luévanos-Rojas, 2016); Dimensionamiento óptimo para las zapatas combinadas de esquina (López-Chavarría, Luévanos-Rojas & Medina-Elizondo, 2017); Minimización de costos de la cubierta de pilotes de concreto reforzado utilizando técnicas de optimización (Regupathi & Sugumar, 2017); Diseño óptimo para zapatas aisladas rectangulares utilizando la presión real del suelo (Luévanos-Rojas, López-Chavarría & Medina-Elizondo, 2017); Diseño óptimo de zapatas basadas en la optimización de *Mixed-Integer Non-Linear Programming* (MINLP) (Jelušič & Žlender, 2018); Experimentación numérica para el diseño óptimo de las zapatas combinadas rectangulares de concreto reforzado (Velázquez-Santillán, Luévanos-Rojas, López-Chavarría, Medina-Elizondo & Sandoval-Rivas, 2018); Optimización de vigas de concreto reforzado para secciones rectangulares con experimentos numéricos (Luévanos-Rojas, López-Chavarría & Medina-Elizondo, 2018).

Los estudios más relevantes sobre cimentaciones profundas que han despertado gran interés para algunos investigadores son: Diseño óptimo basado en algoritmos genéticos de cimentaciones de balsas apiladas con pruebas de modelo (Kim, Yoo & Kang, 2002); Estudio teórico sobre optimización de longitud de pilotes de grupos de pilotes y balsas apiladas (Leung, Klar & Soga, 2010); Práctica actual en el diseño de cimientos de edificios de gran altura en Bangkok, Tailandia (Amornfa, Phienwej & Kitpayuck, 2012);

Metodología de selección experto basada en el conocimiento para optimizar la construcción de pilotes de concreto (Penteado & de Brito, 2012); Metodologías de diseño óptimo para cimentaciones de pilotes en Londres (Letsios, Lagaros & Papadrakakis, 2014); Método de análisis de optimización del diámetro de pilote de cimientos de balsas apiladas basado en la minimización de asentamientos diferenciales (Wang, Yang & Shangguan, 2015); Interacción superestructura-cimentación en la optimización de grupos de pilotes de objetivos múltiples considerando la respuesta de asentamiento (Leung, Klar, Soga & Hoult, 2017); Diseño robusto y procedimiento de optimización para cimientos de balsas apiladas para soportar aerogeneradores altos en arcilla y arena (Ravichandran, Shrestha & Piratla, 2018).

Este artículo muestra un modelo para cabezales o zapatas rectangulares apoyadas sobre un grupo de pilotes para obtener el área mínima en planta que soporta una carga axial y dos momentos en dirección del eje X y Y debido a una columna (caso general). Este modelo considera que los cabezales son perfectamente rígidos y los pilotes están articulados en la unión con los cabezales y, por lo tanto, los pilotes transmiten solamente carga vertical. La metodología normalmente utilizada para obtener el área de la superficie en planta de los cabezales se propone de acuerdo con la distribución de los pilotes, tomando en cuenta las recomendaciones que marcan los reglamentos de construcción. También, cinco tipos de cabezales apoyadas sobre un grupo formado por dos, tres, cuatro, cinco y seis pilotes se muestran para demostrar la exactitud del modelo presentado en este documento.

Metodología

Consideraciones especiales

Para los cabezales y el grupo de pilotes se deben de tomar en cuenta los siguientes requisitos.

Requisitos para los pilotes en el grupo de pilotes

A.- Para determinar el espaciado de los pilotes se debe tener en cuenta lo siguiente:

- 1.- Costo total de la cimentación.
- 2.- Naturaleza del suelo.
- 3.- Comportamiento del grupo de pilotes.
- 4.- Posible levantamiento o compactación del suelo causando daños a estructuras adyacentes.
- 5.- Costo del cabezal o zapata de los pilotes.
- 6.- Tamaño y longitud efectiva de la viga de suelo.
- 7.- Tipo y tamaño de los pilotes.

B.- Los pilotes deben colocarse en una disposición adecuada, de modo que el espacio entre los pilotes oscile entre $2D$ (diámetro del pilote y $3D$, en el caso de cabezales de pilotes aislados, y $(2-6)D$, en el caso de balsas apoyadas sobre pilotes.

C.- El centro de gravedad de pilotes debe colocarse lo más lejos posible del centro de gravedad de las cargas transmitidas desde la estructura hasta el grupo de pilotes.

D.- En el caso de presencia de vecinos, los pilotes deben estar alejados de la línea de propiedad por una distancia no inferior a 1 D, o según lo requiera el método de instalación del pilote.

Requisitos para los cabezales de pilotes. Al igual que las zapatas poco profundas extendidas sobre el suelo con las siguientes adiciones:

- 1.- El diseño debe satisfacer el cortante de penetración cerca de los pilotes o ejes individuales.
- 2.- La profundidad efectiva del cabezal o zapata debe ser de al menos 30 cm. Esto implica un espesor mínimo de 40 cm.
- 3.- La fuerza de apoyo entre los pilotes o ejes individuales y los cabezales no debe exceder la capacidad de ninguno de los elementos.
- 4.- El tamaño de los cabezales de pilotes se fija de tal manera que sobresalga claramente más allá del pilote más externo, no menos de 10 cm, pero preferiblemente 15 cm.

Formulación matemática

La figura 2 muestra los cinco tipos principales de distribución de los pilotes debajo de los cabezales aislados de forma rectangular. Las figuras 2a y 2b se pueden aplicar a cabezales que soportan una carga axial y momento en una dirección. Para las figuras 2c, 2d y 2e, su principal aplicación es para cabezales que soportan una carga axial y dos momentos (dirección X y Y).

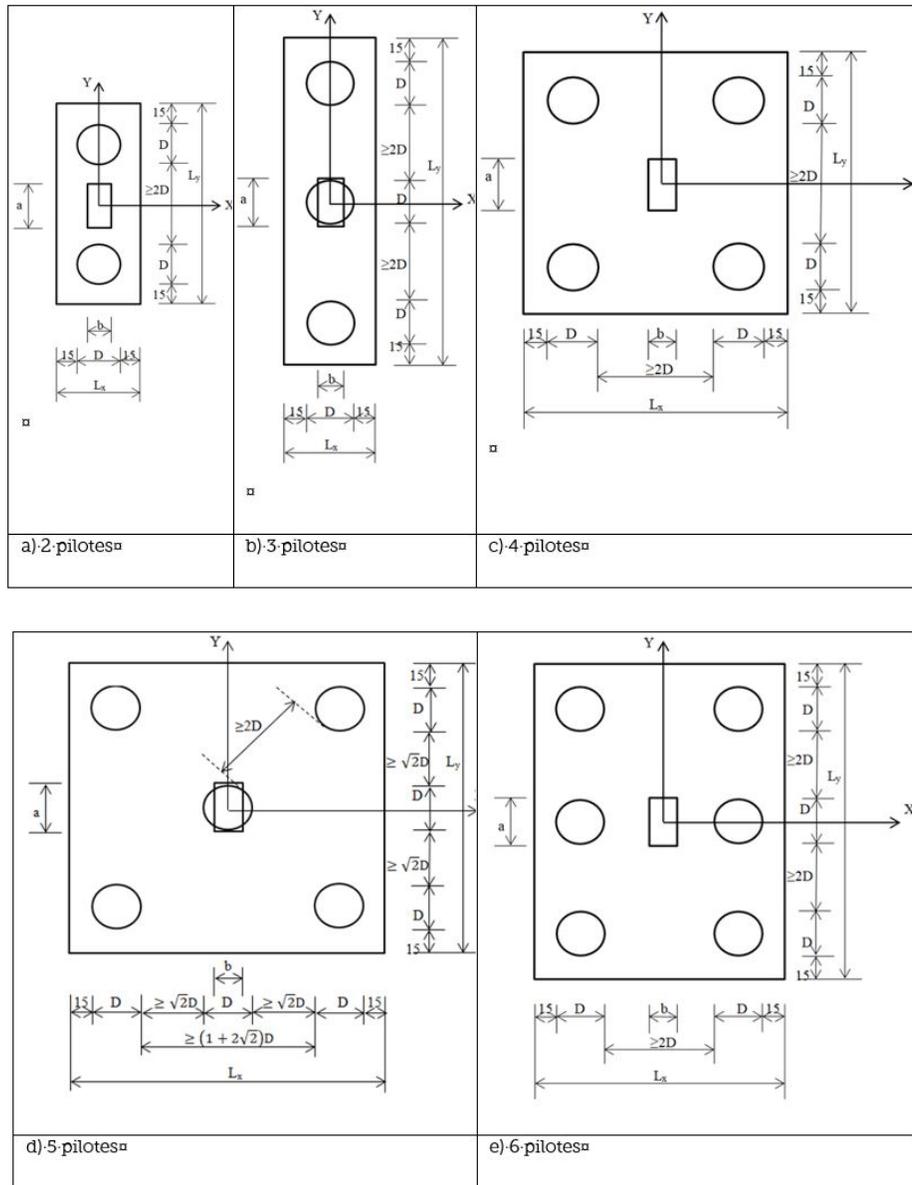


Figura 2. Distribución de pilotes debajo de los cabezales o zapatas aisladas.

Fuente: Elaboración propia.

La ecuación general para obtener el esfuerzo generado en cualquier parte por el suelo sobre las zapatas apoyadas en estratos superficiales (cimentación superficial o poco profundas) sujetas a flexión biaxial es (Gere & Goodo, 2009; López-Chavarría et al., 2017; Luévanos-Rojas et al., 2017; Velázquez-Santillán et al., 2018):

$$\sigma_s = \frac{P}{A_z} + \frac{M_x y_z}{I_{xz}} + \frac{M_y x_z}{I_{yz}} \quad (1)$$

donde σ_s = esfuerzo generado por el terreno sobre la zapata (presión del suelo), A_z = superficie de contacto de la zapata; P = carga axial aplicada en el centro de gravedad de la superficie de contacto de la zapata; M_x = momento alrededor del eje X; M_y = momento alrededor del eje Y; x_z = distancia en dirección del eje X a partir del eje Y a la fibra donde se desea obtener el esfuerzo; y_z = distancia en dirección eje Y a partir

del eje X a la fibra donde se desea obtener el esfuerzo; I_{yz} = momento de inercia de la superficie de contacto de la zapata alrededor del eje Y; e I_{xz} = momento de inercia de la superficie de contacto de la zapata alrededor del eje X.

La ecuación general para obtener el esfuerzo generado por cada pilote sobre los cabezales apoyados sobre pilotes (cimentación profunda) sujetas a flexión biaxial es:

$$\sigma_p = \frac{N_p}{A_p} = \frac{P}{A_{pT}} + \frac{M_x y_p}{\sum I_{xp}} + \frac{M_y x_p}{\sum I_{yp}} \quad (2)$$

donde σ_p = esfuerzo generado por el pilote sobre el cabezal o zapata (presión del pilote); A_p = área de contacto del pilote en estudio; A_{pT} = área de contacto de todos los pilotes; x_p = distancia en dirección del eje X a partir del eje Y a la ubicación del pilote en estudio; y_p = distancia en dirección eje Y a partir del eje X a la ubicación del pilote en estudio; $\sum I_{yp}$ = suma de momentos de inercia de la superficie de contacto de todos los pilotes alrededor del eje Y general; $\sum I_{xp}$ = suma de momentos de inercia de la superficie de contacto de todos los pilotes alrededor del eje X general; y N_p = fuerza axial generada por cada pilote sobre el cabezal o zapata.

Los momentos de inercia de cada pilote son:

$$I_{xp} = I_{xpo} + A_p y_p^2 \quad (3)$$

$$I_{yp} = I_{ypo} + A_p x_p^2 \quad (4)$$

donde I_{xpo} = momento de inercia de la superficie de contacto del pilote alrededor del eje X local (centro del pilote en estudio) y I_{ypo} = momento de inercia de la superficie de contacto del pilote alrededor del eje Y local (centro del pilote en estudio).

Si todos los pilotes tienen la misma área de contacto (sección transversal), entonces se obtiene:

$$A_{pT} = n A_p \quad (5)$$

donde n = número de pilotes.

Ahora, sustituyendo la ecuación (3), (4) y (5) en la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{N_p}{A_p} = \frac{P}{n A_p} + \frac{M_x y_p}{\sum (I_{xpo} + A_p y_p^2)} + \frac{M_y x_p}{\sum (I_{ypo} + A_p x_p^2)} \quad (6)$$

A partir de la ecuación (6), la fuerza axial que ejerce cada pilote sobre el cabezal o zapata se presenta de la siguiente manera:

$$N_p = \frac{P}{n} + \frac{M_x y_p A_p}{\sum (I_{xpo} + A_p y_p^2)} + \frac{M_y x_p A_p}{\sum (I_{ypo} + A_p x_p^2)} \quad (7)$$

Si el momento de inercia local de todos los pilotes se desprecia por ser una cantidad muy pequeña, se obtiene la siguiente ecuación:

$$N_p = \frac{P}{n} + \frac{M_x y_p}{\sum y_p^2} + \frac{M_y x_p}{\sum x_p^2} \quad (8)$$

La ecuación general para cualquier pilote es:

$$N_{p_i} = \frac{P}{n} + \frac{M_x y_{p_i}}{\sum_{i=1}^n y_{p_i}^2} + \frac{M_y x_{p_i}}{\sum_{i=1}^n x_{p_i}^2} \quad (9)$$

donde $i = 1, 2, 3 \dots n$.

Por equilibrio de fuerzas sobre el cabezal o zapata se obtiene:

$$P = \sum_{i=1}^n N_{p_i} \quad (10)$$

La función objetivo para obtener el área mínima de la superficie del cabezal o zapata ($A_{\text{mínima}}$) se muestra como sigue:

$$A_{\text{mínima}} = L_x L_y \quad (11)$$

Las funciones de restricciones para obtener el área mínima de la superficie del cabezal o zapata se muestran como sigue:

$$L_x = 2(x_1 + D/2 + 0.15) \quad (12)$$

$$L_y = 2(y_1 + D/2 + 0.15) \quad (13)$$

$$N_{p_i} = \frac{P}{n} + \frac{M_x y_{p_i}}{\sum_{i=1}^n y_{p_i}^2} + \frac{M_y x_{p_i}}{\sum_{i=1}^n x_{p_i}^2} \quad (14)$$

$$P = \sum_{i=1}^n N_{p_i} \quad (15)$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} N_{p_1} \\ N_{p_2} \\ N_{p_3} \\ \vdots \\ N_{p_n} \end{Bmatrix} \leq N_{p_{\text{permitida}}} \quad (16)$$

Casos particulares

La función objetivo y las restricciones para cada caso se muestran a continuación (figura 2):

Caso A

Para dos pilotes debajo de los cabezales aislados, como se muestra en la figura 2a, la función objetivo es:

$$A_{\text{mínima}} = L_x L_y \quad (17)$$

Las funciones de restricciones son:

$$L_x \geq 2(x_1 + D/2 + 0.15) \quad (18)$$

$$L_y \geq 2(y_1 + D/2 + 0.15) \quad (19)$$

$$x_1 = 0 \quad (20)$$

$$y_1 \geq 1.5D \quad (21)$$

$$N_{p_1} = \frac{P}{2} + \frac{M_x}{2y_1} \quad (22)$$

$$N_{p_2} = \frac{P}{2} - \frac{M_x}{2y_1} \quad (23)$$

$$P = N_{p_1} + N_{p_2} \quad (24)$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} N_{p_1} \\ N_{p_2} \end{Bmatrix} \leq N_{p_{permitida}} \quad (25)$$

Caso B

Para tres pilotes debajo de los cabezales aislados, como se muestra en la figura 2b, la función objetivo es:

$$A_{\text{mínima}} = L_x L_y \quad (26)$$

Las funciones de restricciones son:

$$L_x \geq 2(x_1 + D/2 + 0.15) \quad (27)$$

$$L_y \geq 2(y_1 + D/2 + 0.15) \quad (28)$$

$$x_1 = 0 \quad (29)$$

$$y_1 \geq 3D \quad (30)$$

$$N_{p_1} = \frac{P}{3} + \frac{M_x}{2y_1} \quad (31)$$

$$N_{p_2} = \frac{P}{3} \quad (32)$$

$$N_{p_3} = \frac{P}{3} - \frac{M_x}{2y_1} \quad (33)$$

$$P = N_{p_1} + N_{p_2} + N_{p_3} \quad (34)$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} N_{p_1} \\ N_{p_2} \\ N_{p_3} \end{Bmatrix} \leq N_{p_{permitida}} \quad (35)$$

Caso C

Para cuatro pilotes debajo de los cabezales aislados, como se muestra en la figura 2c, La función objetivo es:

$$A_{\text{mínima}} = L_x L_y \quad (36)$$

Las funciones de restricciones son:

$$L_x \geq 2(x_1 + D/2 + 0.15) \quad (37)$$

$$L_y \geq 2(y_1 + D/2 + 0.15) \quad (38)$$

$$x_1 \geq 1.5D \quad (39)$$

$$y_1 \geq 1.5D \quad (40)$$

$$N_{p_1} = \frac{P}{4} + \frac{M_x}{4y_1} + \frac{M_y}{4x_1} \quad (41)$$

$$N_{p_2} = \frac{P}{4} + \frac{M_x}{4y_1} - \frac{M_y}{4x_1} \quad (42)$$

$$N_{p_3} = \frac{P}{4} - \frac{M_x}{4y_1} + \frac{M_y}{4x_1} \quad (43)$$

$$N_{p_4} = \frac{P}{4} - \frac{M_x}{4y_1} - \frac{M_y}{4x_1} \quad (44)$$

$$P = N_{p_1} + N_{p_2} + N_{p_3} + N_{p_4} \quad (45)$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} N_{p_1} \\ N_{p_2} \\ N_{p_3} \\ N_{p_4} \end{Bmatrix} \leq N_{p_{permitida}} \quad (46)$$

Caso D

Para cinco pilotes debajo de los cabezales aislados, como se muestra en la figura 2d, la función objetivo es:

$$A_{\text{minima}} = L_x L_y \quad (47)$$

Las funciones de restricciones son:

$$L_x \geq 2(x_1 + D/2 + 0.15) \quad (48)$$

$$L_y \geq 2(y_1 + D/2 + 0.15) \quad (49)$$

$$x_1 \geq (1 + \sqrt{2})D \quad (50)$$

$$y_1 \geq (1 + \sqrt{2})D \quad (51)$$

$$N_{p_1} = \frac{P}{5} + \frac{M_x}{4y_1} + \frac{M_y}{4x_1} \quad (52)$$

$$N_{p_2} = \frac{P}{5} + \frac{M_x}{4y_1} - \frac{M_y}{4x_1} \quad (53)$$

$$N_{p_3} = \frac{P}{5} \quad (54)$$

$$N_{p_4} = \frac{P}{5} - \frac{M_x}{4y_1} + \frac{M_y}{4x_1} \quad (55)$$

$$N_{p_5} = \frac{P}{5} - \frac{M_x}{4y_1} - \frac{M_y}{4x_1} \quad (56)$$

$$P = N_{p_1} + N_{p_2} + N_{p_3} + N_{p_4} + N_{p_5} \quad (57)$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} N_{p_1} \\ N_{p_2} \\ N_{p_3} \\ N_{p_4} \\ N_{p_5} \end{Bmatrix} \leq N_{p_{permitida}} \quad (58)$$

Caso E

Para seis pilotes debajo de los cabezales aislados, como se muestra en la figura 2e, la función objetivo es:

$$A_{\text{mínima}} = L_x L_y \quad (59)$$

Las funciones de restricciones son:

$$L_x \geq 2(x_1 + D/2 + 0.15) \quad (60)$$

$$L_y \geq 2(y_1 + D/2 + 0.15) \quad (61)$$

$$x_1 \geq 1.5D \quad (62)$$

$$y_1 \geq 3D \quad (63)$$

$$N_{p_1} = \frac{P}{6} + \frac{M_x}{4y_1} + \frac{M_y}{6x_1} \quad (64)$$

$$N_{p_2} = \frac{P}{6} + \frac{M_x}{4y_1} - \frac{M_y}{6x_1} \quad (65)$$

$$N_{p_3} = \frac{P}{6} + \frac{M_y}{6x_1} \quad (66)$$

$$N_{p_4} = \frac{P}{6} - \frac{M_y}{6x_1} \quad (67)$$

$$N_{p_5} = \frac{P}{6} - \frac{M_x}{4y_1} + \frac{M_y}{6x_1} \quad (68)$$

$$N_{p_6} = \frac{P}{6} - \frac{M_x}{4y_1} - \frac{M_y}{6x_1} \quad (69)$$

$$P = N_{p_1} + N_{p_2} + N_{p_3} + N_{p_4} + N_{p_5} + N_{p_6} \quad (70)$$

$$0 \leq \begin{Bmatrix} N_{p1} \\ N_{p2} \\ N_{p3} \\ N_{p4} \\ N_{p5} \\ N_{p6} \end{Bmatrix} \leq N_{p\text{permitida}} \quad (71)$$

Ejemplos numéricos

Las tablas 1, 2, 3, 4 y 5 muestran los ejemplos numéricos para cada tipo de cabezal, apoyados sobre dos, tres, cuatro, cinco y seis pilotes (figura 2). El diámetro de todos los pilotes para todos los ejemplos se considera de 30 cm. La función objetivo de la superficie mínima para todos los casos es la misma.

Caso A

La tabla 1 muestra cuatro casos para cabezales que soportan una columna en la parte superior, y los cabezales están apoyados sobre dos pilotes. La columna transmite una carga P y un momento M_x al cabezal, y el cabezal está soportado sobre dos pilotes (N_{p1} y N_{p2}). Para todos los casos se limita la capacidad de carga de los pilotes N_{pp} de 600 kN, 650 kN, 700 kN, 750 kN y 800 kN. El caso 1 considera que la columna transmite $P = 800$ kN y $M_x = 200$ kN-m. El caso 2 considera que el cabezal soporta $P = 800$ kN y $M_x = 300$ kN-m. El caso 3 considera que la columna transmite $P = 1000$ kN y $M_x = 200$ kN-m. El caso 4 considera que el cabezal soporta $P = 1000$ kN y $M_x = 300$ kN-m.

Tabla 1. Cabezales o zapatas aisladas apoyadas sobre dos pilotes.

N_{pp} kN	L_x m	L_y m	x_1 m	y_1 m	N_{p1} kN	N_{p2} kN	$A_{\text{mínima}}$ m ²
Caso 1: $P = 800$ kN; $M_x = 200$ kN-m							
600	0.60	1.60	0.00	0.50	600	200	0.96
650	0.60	1.50	0.00	0.45	622	178	0.90
700	0.60	1.50	0.00	0.45	622	178	0.90
750	0.60	1.50	0.00	0.45	622	178	0.90
800	0.60	1.50	0.00	0.45	622	178	0.90
Caso 2: $P = 800$ kN; $M_x = 300$ kN-m							
600	0.60	2.10	0.00	0.75	600	200	1.26
650	0.60	1.80	0.00	0.60	650	150	1.08
700	0.60	1.60	0.00	0.50	700	100	0.96
750	0.60	1.50	0.00	0.45	733	67	0.90
800	0.60	1.50	0.00	0.45	733	67	0.90
Caso 3: $P = 1000$ kN; $M_x = 200$ kN-m							
600	0.60	2.60	0.00	1.00	600	400	1.56
650	0.60	1.93	0.00	0.67	650	350	1.16
700	0.60	1.60	0.00	0.50	700	300	0.96
750	0.60	1.50	0.00	0.45	722	278	0.90
800	0.60	1.50	0.00	0.45	722	278	0.90
Caso 4: $P = 1000$ kN; $M_x = 300$ kN-m							
600	0.60	3.60	0.00	1.50	600	400	2.16
650	0.60	2.60	0.00	1.00	650	350	1.56
700	0.60	2.10	0.00	0.75	700	300	1.26
750	0.60	1.80	0.00	0.60	750	250	1.08
800	0.60	1.60	0.00	0.50	800	200	0.96

Fuente: Elaboración propia.

Caso B

La tabla 2 presenta cuatro casos para cabezales que soportan una columna en la parte superior y los cabezales están apoyados sobre tres pilotes. La columna transmite una carga P y un momento M_x al cabezal, y el cabezal está soportado sobre tres pilotes (N_{p1} , N_{p2} y N_{p3}). Para todos los casos se limita la capacidad de carga de los pilotes N_{pp} de 600 kN, 650 kN, 700 kN, 750 kN y 800 kN. El caso 1 considera que la columna transmite $P = 1200$ kN y $M_x = 800$ kN-m. El caso 2 considera que el cabezal soporta $P = 1200$ kN y $M_x = 900$ kN-m. El caso 3 considera que la columna transmite $P = 1300$ kN y $M_x = 800$ kN-m. El caso 4 considera que el cabezal soporta $P = 1300$ kN y $M_x = 900$ kN-m.

Tabla 2. Cabezales o zapatas aisladas apoyadas sobre tres pilotes.

N_{pp} kN	L_x m	L_y m	x_1 m	y_1 m	N_{p1} kN	N_{p2} kN	N_{p3} kN	A_{minima} m ²
Caso 1: $P = 1200$ kN; $M_x = 800$ kN-m								
600	0.60	4.60	0.00	2.00	600	400	200	2.76
650	0.60	3.80	0.00	1.60	650	400	150	2.28
700	0.60	3.27	0.00	1.33	700	400	100	1.96
750	0.60	2.89	0.00	1.14	750	400	50	1.73
800	0.60	2.60	0.00	1.00	800	400	0	1.56
Caso 2: $P = 1200$ kN; $M_x = 900$ kN-m								
600	0.60	5.10	0.00	2.25	600	400	200	3.06
650	0.60	4.20	0.00	1.80	650	400	150	2.52
700	0.60	3.60	0.00	1.50	700	400	100	2.16
750	0.60	3.17	0.00	1.29	750	400	50	1.90
800	0.60	2.85	0.00	1.12	800	400	0	1.71
Caso 3: $P = 1300$ kN; $M_x = 800$ kN-m								
600	0.60	5.40	0.00	2.40	600	433	267	3.24
650	0.60	4.29	0.00	1.85	650	433	217	2.58
700	0.60	3.60	0.00	1.50	700	433	167	2.16
750	0.60	3.13	0.00	1.26	750	433	117	1.88
800	0.60	2.78	0.00	1.09	800	433	67	1.67
Caso 4: $P = 1300$ kN; $M_x = 900$ kN-m								
600	0.60	6.00	0.00	2.70	600	433	267	3.60
650	0.60	4.75	0.00	2.08	650	433	217	2.85
700	0.60	3.97	0.00	1.69	700	433	167	2.38
750	0.60	3.44	0.00	1.42	750	433	117	2.07
800	0.60	3.05	0.00	1.23	800	433	67	1.83

Fuente: Elaboración propia.

Caso C

La tabla 3 presenta cuatro casos para cabezales que soportan una columna en la parte superior y los cabezales están apoyados sobre cuatro pilotes. La columna transmite una carga P y dos momentos M_x y M_y al cabezal, y el cabezal está soportado sobre cuatro pilotes (N_{p1} , N_{p2} , N_{p3} y N_{p4}). Para todos los casos no se limita la capacidad de carga de los pilotes N_{pp} . El caso 1 considera que la columna transmite $P = 1200$ kN, $M_x = 400$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m. El caso 2 considera que el cabezal soporta $P = 1200$ kN, $M_x = 600$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m. El caso 3 considera que la columna transmite $P = 1200$ kN, $M_x = 800$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-

m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m. El caso 4 considera que el cabezal soporta $P = 1200$ kN, $M_x = 1000$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m.

Tabla 3. Cabezales o zapatas aisladas apoyadas sobre cuatro pilotes.

M_y kN- m	L_x m	L_y m	x_1 m	y_1 m	N_{p1} kN	N_{p2} kN	N_{p3} kN	N_{p4} kN	$A_{mínima}$ m ²
Caso 1: $P = 1200$ kN; $M_x = 400$ kN-m									
400	1.93	1.93	0.67	0.67	600	300	300	0	3.74
600	2.52	1.99	0.96	0.70	600	287.12	312.88	0	5.02
800	3.10	2.03	1.25	0.71	600	279.76	320.24	0	6.29
1000	3.68	2.05	1.54	0.73	600	274.98	325.02	0	7.55
1200	4.25	2.07	1.83	0.74	600	271.62	328.38	0	8.82
Caso 2: $P = 1200$ kN; $M_x = 600$ kN-m									
400	1.99	2.52	0.70	0.96	600	312.88	287.12	0	5.02
600	2.60	2.60	1.00	1.00	600	300	300	0	6.76
800	3.20	2.65	1.30	1.03	600	292.62	307.38	0	8.49
1000	3.80	2.68	1.60	1.04	600	287.82	312.18	0	10.21
1200	4.40	2.71	1.90	1.05	600	284.44	315.56	0	11.93
Caso 3: $P = 1200$ kN; $M_x = 800$ kN-m									
400	2.03	3.10	0.71	1.25	600	320.24	279.76	0	6.29
600	2.65	3.20	1.03	1.30	600	307.38	292.62	0	8.49
800	3.27	3.27	1.33	1.33	600	300	300	0	10.67
1000	3.88	3.31	1.64	1.36	600	295.19	304.81	0	12.85
1200	4.49	3.34	1.95	1.37	600	291.81	308.19	0	15.02
Caso 4: $P = 1200$ kN; $M_x = 1000$ kN-m									
400	2.05	3.68	0.73	1.54	600	325.02	274.98	0	7.55
600	2.68	3.80	1.04	1.60	600	312.18	287.82	0	10.21
800	3.31	3.88	1.36	1.64	600	304.81	295.19	0	12.85
1000	3.93	3.93	1.67	1.67	600	300	300	0	15.47
1200	4.56	3.97	1.98	1.69	600	296.62	303.38	0	18.09

Fuente: Elaboración propia.

Caso D

La tabla 4 presenta cuatro casos para cabezales que soportan a una columna en la parte superior y los cabezales están apoyados sobre cinco pilotes. La columna transmite una carga P y dos momentos M_x y M_y al cabezal, y el cabezal está soportado sobre cinco pilotes (N_{p1} , N_{p2} , N_{p3} , N_{p4} y N_{p5}). Para todos los casos no se limita la capacidad de carga de los pilotes N_{pp} . El caso 1 considera que la columna transmite $P = 1200$ kN, $M_x = 400$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m. El caso 2 considera que el cabezal soporta $P = 1200$ kN, $M_x = 600$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m. El caso 3 considera que la columna transmite $P = 1200$ kN, $M_x = 800$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m. El caso 4 considera que el cabezal soporta $P = 1200$ kN, $M_x = 1000$ kN-m, $M_y = 400$ kN-m, 600 kN-m, 800 kN-m, 1000 kN-m y 1200 kN-m.

Tabla 4. Cabezales o zapatas aisladas apoyadas sobre cinco pilotes.

M_y kN-m	L_x m	L_y m	x_1 m	y_1 m	N_{p1} kN	N_{p2} kN	N_{p3} kN	N_{p4} kN	N_{p5} kN	$A_{\text{mínima}}$ m^2
Caso 1: $P = 1200\text{kN}$; $M_x = 400\text{ kN-m}$										
400	2.27	2.27	0.83	0.83	480	240	240	240	0	5.14
600	3.01	2.33	1.2	0.87	480	231	240	249	0	7.02
800	3.75	2.37	1.57	0.89	480	225.9	240	254.1	0	8.89
1000	4.49	2.4	1.94	0.9	480	222.7	240	257.3	0	10.75
1200	5.22	2.41	2.31	0.91	480	220.4	240	259.6	0	12.61
Caso 2: $P = 1200\text{kN}$; $M_x = 600\text{ kN-m}$										
400	2.33	3.01	0.87	1.2	480	249	240	231	0	7.02
600	3.1	3.1	1.25	1.25	480	240	240	240	0	9.61
800	3.86	3.15	1.63	1.28	480	234.9	240	245.1	0	12.19
1000	4.63	3.19	2.01	1.29	480	231.7	240	248.3	0	14.76
1200	5.39	3.22	2.39	1.31	480	229.4	240	250.6	0	17.33
Caso 3: $P = 1200\text{kN}$; $M_x = 800\text{ kN-m}$										
400	2.37	3.75	0.89	1.57	480	254.1	240	225.9	0	8.89
600	3.15	3.86	1.28	1.63	480	245.1	240	234.9	0	12.19
800	3.93	3.93	1.67	1.67	480	240	240	240	0	15.47
1000	4.71	3.98	2.06	1.69	480	236.7	240	243.3	0	18.75
1200	5.49	4.01	2.44	1.71	480	234.5	240	245.5	0	22.02
Caso 4: $P = 1200\text{kN}$; $M_x = 1000\text{ kN-m}$										
400	2.4	4.49	0.9	1.94	480	257.3	240	222.7	0	10.75
600	3.19	4.63	1.29	2.01	480	248.3	240	231.7	0	14.76
800	3.98	4.71	1.69	2.06	480	243.3	240	236.7	0	18.75
1000	4.77	4.77	2.08	2.08	480	240	240	240	0	22.72
1200	5.55	4.81	2.48	2.1	480	237.7	240	242.3	0	26.69

Fuente: Elaboración propia.

Caso E

La tabla 5 presenta cuatro casos para cabezales que soportan una columna en la parte superior, y los cabezales están apoyados sobre seis pilotes. La columna transmite una carga P y dos momentos M_x y M_y al cabezal, y el cabezal está soportado sobre seis pilotes (N_{p1} , N_{p2} , N_{p3} , N_{p4} , N_{p5} y N_{p6}). Para todos los casos no se limita la capacidad de carga de los pilotes N_{pp} . El caso 1 considera que la columna transmite $P = 1200\text{ kN}$, $M_x = 400\text{ kN-m}$, $M_y = 400\text{ kN-m}$, 600 kN-m , 800 kN-m , 1000 kN-m y 1200 kN-m . El caso 2 considera que el cabezal soporta $P = 1200\text{ kN}$, $M_x = 600\text{ kN-m}$, $M_y = 400\text{ kN-m}$, 600 kN-m , 800 kN-m , 1000 kN-m y 1200 kN-m . El caso 3 considera que la columna transmite $P = 1200\text{ kN}$, $M_x = 800\text{ kN-m}$, $M_y = 400\text{ kN-m}$, 600 kN-m , 800 kN-m , 1000 kN-m y 1200 kN-m . El caso 4 considera que el cabezal soporta $P = 1200\text{ kN}$, $M_x = 1000\text{ kN-m}$, $M_y = 400\text{ kN-m}$, 600 kN-m , 800 kN-m , 1000 kN-m y 1200 kN-m .

Tabla 5. Cabezales o zapatas aisladas apoyadas sobre seis pilotes.

M_y kN-m	L_x m	L_y m	x_1 m	y_1 m	N_{p1} kN	N_{p2} kN	N_{p3} kN	N_{p4} kN	N_{p5} kN	N_{p6} kN	A_{minima} m ²
Caso 1: P = 1200kN; $M_x = 400$ kN-m											
400	1.99	2.52	0.7	0.96	400	208.6	295.7	104.3	191.4	0	5.02
600	2.6	2.6	1	1	400	200	300	100	200	0	6.76
800	3.2	2.65	1.3	1.03	400	195.1	302.5	97.54	204.9	0	8.49
1000	3.8	2.68	1.6	1.04	400	191.9	304.1	95.94	208.1	0	10.21
1200	4.4	2.71	1.9	1.05	400	189.6	305.2	94.81	210.4	0	11.93
Caso 2: P = 1200kN; $M_x = 600$ kN-m											
400	2.04	3.39	0.72	1.39	400	215.2	292.4	107.6	184.8	0	6.92
600	2.67	3.5	1.03	1.45	400	206.7	296.7	103.3	193.3	0	9.35
800	3.29	3.57	1.35	1.49	400	201.8	299.1	100.9	198.3	0	11.76
1000	3.91	3.62	1.65	1.51	400	198.6	300.7	99.28	201.5	0	14.16
1200	4.53	3.66	1.96	1.53	400	196.3	301.9	98.15	203.7	0	16.55
Caso 3: P = 1200kN; $M_x = 800$ kN-m											
400	2.07	4.25	0.74	1.83	400	218.9	290.5	109.5	181.1	0	8.82
600	2.71	4.4	1.05	1.9	400	210.4	294.8	105.2	189.6	0	11.93
800	3.34	4.49	1.37	1.95	400	205.5	297.3	102.7	194.5	0	15.02
1000	3.97	4.56	1.69	1.98	400	202.3	298.9	101.1	197.7	0	18.09
1200	4.6	4.6	2	2	400	200	300	100	200	0	21.16
Caso 4: P = 1200kN; $M_x = 1000$ kN-m											
400	2.09	5.12	0.75	2.26	400	221.3	289.4	110.6	178.7	0	10.71
600	2.74	5.3	1.07	2.35	400	212.7	293.6	106.4	187.3	0	14.5
800	3.38	5.41	1.39	2.41	400	207.8	296.1	103.9	192.2	0	18.27
1000	4.01	5.49	1.71	2.44	400	204.6	297.7	102.3	195.4	0	22.02
1200	4.65	5.54	2.02	2.47	400	202.4	298.8	101.2	197.6	0	25.76

Fuente: Elaboración propia.

Resultados

La tabla 1 muestra el área óptima para el caso A. Los parámetros constantes o conocidos son: D, x_1 , P, M_x y N_{pp} permitida. Las variables de decisión son: A_{minima} , L_x , L_y , y_1 , N_{p1} y N_{p2} . Los resultados encontrados para todos los casos son los siguientes: L_x permanece constante (valor mínimo); cuando N_{pp} se incrementa, los valores de L_y , y_1 y A_{minima} disminuyen hasta alcanzar el valor mínimo.

La tabla 2 presenta el área óptima para el caso B. Los parámetros constantes o conocidos son: D, x_1 , P, M_x y N_{pp} permitida. Las variables de decisión son: A_{minima} , L_x , L_y , y_1 , N_{p1} , N_{p2} y N_{p3} . Los resultados obtenidos para los cuatro casos son los siguientes: L_x permanece constante (valor mínimo); N_{p2} es el promedio de N_{p1} y N_{p3} ; si N_{pp} se incrementa, los valores de L_y , y_1 y A_{minima} disminuyen.

La tabla 3 muestra el área óptima para el caso C. Los parámetros constantes o conocidos son: D, P, M_x y M_y . Las variables de decisión son: A_{minima} , L_x , L_y , x_1 , y_1 , N_{p1} , N_{p2} , N_{p3} y N_{p4} . Los resultados que aparecen para los cuatro casos son los siguientes: Cuando M_y se incrementa, los valores de L_x , L_y , x_1 , y_1 y A_{minima} aumentan; las cargas que ejercen los pilotes en todos los casos son $N_{p1} = 600$ kN y $N_{p4} = 0$ kN; cuando $M_x = M_y$, se presenta que $N_{p2} = N_{p3} = 300$ kN, $L_x = L_y$, $x_1 = y_1$.

La tabla 4 presenta el área óptima para el caso D. Los parámetros constantes o conocidos son: D, P, M_x y M_y . Las variables de decisión son: A_{minima} , L_x , L_y , x_1 , y_1 , N_{p1} , N_{p2} , N_{p3} , N_{p4} y N_{p5} . Los resultados que aparecen para los cuatro casos son los siguientes: Cuando M_y se incrementa, los valores de L_x , L_y , x_1 , y_1 y

$A_{\text{mínima}}$ aumentan; las cargas que ejercen los pilotes en todos los casos son $N_{p1} = 480 \text{ kN}$ y $N_{p5} = 0 \text{ kN}$; cuando $M_x = M_y$, se presenta que $N_{p2} = N_{p3} = N_{p4} = 240 \text{ kN}$, $L_x = L_y$, $x_1 = y_1$; el promedio de N_{p1} , N_{p2} , N_{p4} y N_{p5} es el valor de $N_{p3} = 240 \text{ kN}$; el promedio de N_{p1} y N_{p5} es el valor de $N_{p3} = 240 \text{ kN}$; el promedio de N_{p2} y N_{p4} es el valor de $N_{p3} = 240 \text{ kN}$.

La tabla 5 muestra el área óptima para el caso E. Los parámetros constantes o conocidos son: D , P , M_x y M_y . Las variables de decisión son: $A_{\text{mínima}}$, L_x , L_y , x_1 , y_1 , N_{p1} , N_{p2} , N_{p3} , N_{p4} , N_{p5} y N_{p6} . Los resultados que aparecen para los cuatro casos son los siguientes: Cuando M_y se incrementa, los valores de L_x , L_y , x_1 , y_1 y $A_{\text{mínima}}$ aumentan; las cargas que ejercen los pilotes en todos los casos son $N_{p1} = 400 \text{ kN}$ y $N_{p5} = 0 \text{ kN}$; el promedio de N_{p1} y N_{p5} es el valor de N_{p3} ; el promedio de N_{p2} y N_{p6} es el valor de N_{p4} .

Conclusiones

La cimentación de una estructura es la parte esencial para transmitir las cargas de columna o pared al terreno subyacente debajo de la estructura. En el caso de cimentaciones profundas, las cargas que provienen de la estructura descansan sobre una tapa o cabezal de los pilotes o zapata y, a su vez, se trasmite a los pilotes. El nuevo modelo presentado en este artículo produce resultados que tienen una precisión sin precedentes para todos los problemas de ingeniería de cimientos. La parte principal de esta investigación es obtener el área óptima de los cabezales rectangulares utilizando las técnicas de optimización.

Las cimentaciones profundas se utilizan para transferir cargas a un estrato más fuerte, la cual puede ubicarse a una profundidad significativa debajo de la superficie del suelo. Las cimentaciones superficiales pueden ser antieconómicas, incluso cuando la capacidad de carga del suelo cerca de la superficie del suelo es demasiado baja.

El modelo propuesto presentado en este documento para encontrar el área óptima de la superficie en planta para los cabezales rectangulares bajo una carga concéntrica y momentos alrededor de los ejes X y Y debido a la columna, también se puede usar para los otros casos: 1) cabezales bajo una carga concéntrica; 2) cabezales bajo una carga concéntrica y un momento en una dirección.

Las principales conclusiones son:

1. La metodología mostrada en este documento es más precisa y converge más rápidamente.

2. El modelo clásico no será práctico en comparación con esta metodología, ya que el modelo normalmente utilizado para obtener el área de la superficie en planta de los cabezales se propone de acuerdo con la distribución de los pilotes, tomando en cuenta las recomendaciones que marcan los reglamentos de construcción.

El modelo presentado en este artículo se aplica solo para encontrar el área óptima de los cabezales rectangulares en planta; este estudio supone que los cabezales son perfectamente rígidos y los pilotes están articulados en la unión con los cabezales y, por lo tanto, los pilotes transmiten solamente carga vertical.

Se sugiere estudiar en futuras investigaciones el área óptima para cabezales o zapatas apoyadas sobre pilotes de otro tipo de forma en planta, como circular, triangular, pentagonal, hexagonal, etc.

Referencias

- Aldwaik, M., & Adeli, H. (2014). Advances in optimization of highrise building structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50, 899-919. doi: <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1148-1>
<https://dl.acm.org/doi/10.1007/s00158-014-1148-1>
- Amornfa, K., Phienweij, N., & Kitpayuck, P. (2012). Current practice on foundation design of high-rise buildings in Bangkok, Thailand. *Lowland Technology International Journal*, 14(2), 70-83.
http://cot.unhas.ac.id/journals/index.php/falt_lti/article/view/441/334
<https://core.ac.uk/download/pdf/59167224.pdf>
- Chagoyén, E., Negrín, A., Cabrera, M., López, L., & Padrón, N. (2009). Diseño óptimo de cimentaciones superficiales rectangulares. *Formulación Revista de la Construcción*, 8(2), 60-71.
<https://www.redalyc.org/pdf/1276/127619798006.pdf>
- Gere, J., & Goodo, B. (2009). *Mecánica de materiales*. México, Distrito Federal: Cengage Learning.
- Hassaan, G. A. (2014). Optimal design of machinery shallow foundations with silt soils. *International Journal of Mechanical Engineering (IJME)*, 4(3), 11-24. <https://pdfs.semanticscholar.org/2fbf/6c521e96565d28203aae0299fd65efa07663.pdf>
<https://vixra.org/pdf/1601.0328v1.pdf>
- Hui, L., Zhuoyi, C., & Mingji, Z. (2015). Genetic algorithm application on optimal design of strip foundation. *The Open Cybernetics & Systemics Journal*, 9, 335-339. doi: <https://doi.org/10.2174/1874110X01509010335>
- Hwang, J. H., Lyu, Y. D., & Chung, M. C. (2011). Optimizing pile group design using a real genetic approach. *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference* (pp. 491-499). Maui, Hawaii, USA: International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE). <https://www.onepetro.org/conference-paper/ISOPE-1-11-056>
- Jelušič, P., & Žlender, B. (2018). Optimal design of pad footing based on MINLP optimization. *Soils and Foundations*, 58(2), 277-289. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2018.02.002>
- Kao, C., & Yeh, I. (2014). Optimal design of plane frame structures using artificial neural networks and ratio variables. *Structural Engineering and Mechanics*, 52(4), 739-753. doi: <https://doi.org/10.12989/sem.2014.52.4.739>
- Kim, H., Yoo, H., & Kang, I. (2002). Genetic algorithm-based optimum design of piled raft foundations with model tests. *Geotechnical Engineering*, 33(1), 1-11. <https://www.tib.eu/en/search/id/BLSE%3ARN113801189/Genetic-Algorithm-Based-Optimum-Design-of-Piled/>
- Kravanja, S., & Žula, T. (2010). Cost optimization of industrial steel building structures. *Advances in Engineering Software*, 41(3), 442-450. doi: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2009.03.005>
- Letsios, C., Lagaros, N. D., & Papadrakakis, M. (2014). Optimum design methodologies for pile foundations in London. *Case Studies in Structural Engineering*, 2, 24-32. doi: <https://doi.org/10.1016/j.csse.2014.08.001>
- Leung, Y., Klar, A., & Soga, K. (2010). Theoretical study on pile length optimization of pile groups and piled rafts. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(2), 319-330. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000206](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000206)
- Leung, Y., Klar, A., Soga, K., & Hoult, N. (2017). Superstructure-foundation interaction in multi-objective pile group optimization considering settlement response. *Canadian Geotechnical Journal*, 54(10), 1408-1420. doi: <https://doi.org/10.1139/cgi-2016-0498>
- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., & Medina-Elizondo, M. (2017). Optimal dimensioning for the corner combined footings. *Advances in Computational Design*, 2(2), 169-183. doi: <https://doi.org/10.12989/acd.2017.2.2.169>
- Luévanos-Rojas, A. (2016). Numerical experimentation for the optimal design of reinforced rectangular concrete beams for singly reinforced sections. *Dyna*, 83(196), 134-142. doi: <http://dx.doi.org/10.15446/dyna.v83n196.48031>

- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2017). Optimal design for rectangular isolated footings using the real soil pressure. *Ingeniería e Investigación*, 37(2), 25-33. doi: <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v37n2.61447>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2018). Optimización de vigas de concreto reforzado para secciones rectangulares con experimentos numéricos. *Computación y Sistemas*, 22(2), 599-606. doi: <https://doi.org/10.13053/CyS-22-2-2542>
- Ng, C., & Lam, H. (2005). Optimization design of tall buildings under multiple design criteria. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics (IJAMM)*, 4, 35-48. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.605.8812&rep=rep1&type=pdf>
- Pallares-Muñoz, M. R., & Rodríguez-Calderón, W. (2014). Optimización del Diseño en Armaduras. *Ingeniería y Región*, (11), 91-99. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5432264>
- Penteado, M., & de Brito, J. (2012). Expert knowledge-based selection methodology for optimizing the construction of concrete piles. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 26(1), 95-103. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CF.1943-5509.0000196](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000196)
- Ravichandran, N., Shrestha, S., & Piratla, K. (2018). Robust design and optimization procedure for piled-raft foundation to support tall wind turbine in clay and sand. *Soils and Foundation*, 58(3), 744-755. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2018.02.027>
- Regupathi, R., & Sugumar, R. (2017). Cost minimization of reinforced concrete pile cap using optimization techniques. *International Journal of Advance Engineering and Research Development*, 4(7), 745-750. http://www.ijaerd.com/papers/finished_papers/Cost%20Minimization%20Of%20Reinforced%20Concrete%20Pile%20Cap%20Using%20Optimization%20Techniques-IJAERDV04I0762754.pdf
- Tapia, M., Botello, S., Caudillo, L. A., Hernández, H., Munguía, I., Salazar, J. E., Ortega, E., Gómez, J. C., Quiroz, D., & Yáñez, M. (2012). Diseño óptimo de estructuras tridimensionales. *Acta Universitaria*, 22(7), 25-31. <https://www.redalyc.org/pdf/416/41624511003.pdf>
- Tiliouine, B., & Fedghouche, F. (2014). Cost optimization of reinforced high strength concrete T-sections in flexure. *Structural Engineering and Mechanics*, 49(1), 65-80. doi: <https://doi.org/10.12989/sem.2014.49.1.065>
- Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., & Sandoval-Rivas, R. (2018). Numerical experimentation for the optimal design for reinforced concrete rectangular combined footings. *Advances in Computational Design*, 3(1), 49-69. doi: <https://doi.org/10.12989/acd.2018.3.1.049>
- Wang, W., Yang, M., & Shangguan, S. (2015). Pile diameter optimization analysis method of piled raft foundation based on minimization of differential settlements. *Rock and Soil Mechanics*, 36(2), 178-184. doi: <https://doi.org/10.16285/j.rsm.2015.S2.023>