

RESUMEN / ABSTRACT

Un mecanismo esférico se define como aquel en el que cada eslabón móvil rota respecto a un punto estacionario común, cualquier punto sobre el eslabón está restringido a moverse en una superficie esférica, y todas las superficies esféricas del movimiento son concéntricas. En este trabajo se presenta el análisis de movilidad del mecanismo esférico 4R considerando, además de la movilidad del eslabón de entrada y de salida, la movilidad del eslabón acoplador respecto al eslabón de entrada y respecto al eslabón de salida. De este análisis se derivan las condiciones de movilidad del mecanismo las cuales se presentan en diagramas de movilidad, y de este mismo análisis se obtuvieron las condiciones de movilidad global que permiten identificar de una manera sencilla, el tipo de movimiento que tendrá cada eslabón, sólo con conocer las dimensiones del mecanismo.

A spherical mechanism is defined as the one in which each movable link rotates with respect to a common stationary point, any point on the link is confined to move in a spherical surface, and all spherical surfaces of the movement are concentric. In this paper the analysis of the movable spherical mechanism 4R is presented considering, besides the mobility of the link entering and exiting the mobility of the coupler link regarding the linkage entrance with regards to the linkage exit. From this analysis the conditions of mobility of the mechanism was derived and are presented in mobility diagrams and from the same analysis was obtained the conditions for global mobility that allow the identification in a simple way, the type of mobility that each link will have, with only the dimensions of the mechanism.

Recibido: 22 de Noviembre de 2002

Aceptado: 10 de Marzo de 2003

¹ Actualmente realizando estudios de doctorado en Heriot-Watt University, Escocia, UK.

* Facultad de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Electrónica. Universidad de Guanajuato. Tampico 912, Salamanca, Gto., México, C.P. 36730. Tel. (464) 6480911 Fax (464) 6472400. correos electrónicos: him1@hw.ac.uk, jecer@salamanca.ugto.mx, aguileras@salamanca.ugto.mx

Movilidad del Mecanismo Esférico Tipo 4R.

Hugo I. Medellín Castillo^{*1}, J. J. Cervantes Sánchez^{*} y L. Antonio Aguilera Cortés^{*}

INTRODUCCIÓN

Un mecanismo esférico se define como aquel en el que cada eslabón móvil rota respecto a un punto estacionario común, cualquier punto sobre un eslabón está restringido a moverse en una superficie esférica, y todas las superficies esféricas del movimiento son concéntricas.

Los mecanismos esféricos han atraído la atención de investigadores durante las últimas décadas. Típicamente, la movilidad del mecanismo esférico 4R ha sido descrita mediante las llamadas condiciones de Grashof. Éstas fueron primeramente presentadas por Freudenstein (1965) y posteriormente Savage y Hall (1970) propusieron una notación especial para este mecanismo. Diversos y distintos análisis de movilidad se han publicado [2-10]. En cada uno de estos trabajos se propone una clasificación del mecanismo, basada principalmente en las características de movilidad de éste y están orientados principalmente a la obtención de condiciones de movilidad del eslabón de entrada y del eslabón de salida.

En este trabajo se presenta el análisis de movilidad del mecanismo esférico 4R considerando, además de la movilidad del eslabón de entrada y de salida, la movilidad del eslabón acoplador respecto al eslabón de entrada y respecto al eslabón de salida. De este análisis se derivan las condiciones de movilidad del mecanismo las cuales se representan en diagramas de movilidad. En este artículo se entenderá por *movilidad* la capacidad de obtener movimiento, ya sea en un eslabón o en un mecanismo completo.

EL MECANISMO ESFÉRICO TIPO 4R

Existen dos factores importantes a considerar en los mecanismos esféricos: los eslabones y las articulaciones (pares cinemáticos). Los eslabones son generalmente cuerpos curvilíneos que se mueven sobre superficies esféricas y se definen por el ángulo del arco que forman. Por su parte, las articulaciones entre dos eslabones adyacentes son generalmente del tipo de revolución (*R*), y se definen

PALABRAS CLAVE: Mecanismo esférico; Eslabones móviles.

KEYWORDS: Spherical linkage; Mobile linkages.

ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO

por su eje de giro. De este modo, un mecanismo esférico tipo 4R es una cadena cinemática cerrada compuesta por cuatro eslabones y cuatro articulaciones del tipo de revolución (R) cuyos ejes se cortan en un punto común O . Este mecanismo también puede considerarse como un cuadrilátero esférico articulado en los vértices A, B, C y D , como se muestra en la Fig. 1. En esta figura se puede observar que la geometría de los cuatro eslabones AB, BC, CD y DA , está definida mediante los cuatro ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, y α_4 , respectivamente. El eslabón AB será designado como el eslabón de entrada, al eslabón BC se le definirá como el eslabón acoplador, el eslabón CD será llamado eslabón de salida y finalmente al eslabón DA se le designará eslabón fijo. El movimiento relativo entre dos eslabones adyacentes será representado mediante el ángulo que forman los dos arcos o sectores circulares correspondientes. Entonces, puede decirse que el movimiento del mecanismo esférico 4R puede describirse mediante el movimiento relativo de cuatro sectores circulares OAB, OBC, OCD y ODA . Estos movimientos relativos serán designados mediante los ángulos θ, β, γ y ϕ , los cuales se miden con respecto a las tangentes a los puntos de unión, como se muestra en la Fig. 1.

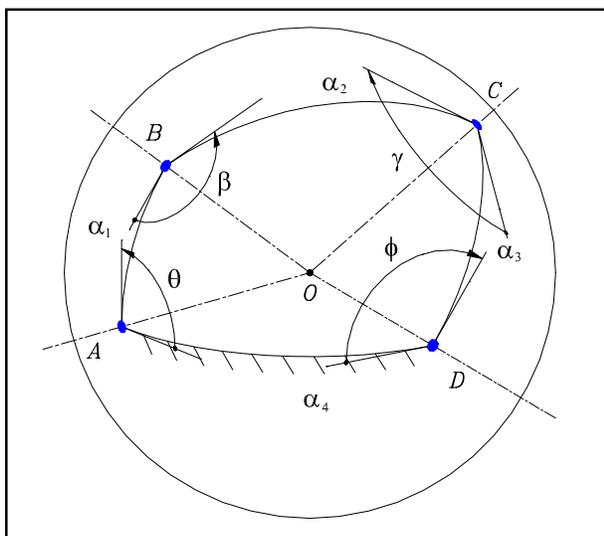


Figura 1. El mecanismo esférico 4R.

El estudio de desplazamiento del mecanismo esférico 4R se realizará analizando el desplazamiento de cada eslabón, como se presenta a continuación:

Desplazamiento del eslabón de entrada

El análisis de desplazamiento está basado en el diagrama cinemático auxiliar mostrado en la Fig. 2. Las posiciones de los extremos A, B, C y D se representan mediante los vectores unitarios $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y \mathbf{d} , respectivamente. Estos vectores representan los ejes de rotación del mecanismo, y pueden obtenerse mediante las siguientes expresiones, Medellín (2001):

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \text{sen}\alpha_4 \\ \text{cos}\alpha_4 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \text{cos}\alpha_1 \text{sen}\alpha_4 - \text{sen}\alpha_1 \text{cos}\alpha_4 \text{cos}\theta \\ \text{cos}\alpha_1 \text{cos}\alpha_4 + \text{sen}\alpha_1 \text{sen}\alpha_4 \text{cos}\theta \\ \text{sen}\alpha_1 \text{sen}\theta \end{Bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \text{sen}\alpha_3 \text{cos}\phi \\ \text{cos}\alpha_3 \\ \text{sen}\alpha_3 \text{sen}\phi \end{Bmatrix} \text{ y } \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Debido a que los eslabones son considerados cuerpos rígidos, el ángulo entre los ejes móviles del mecanismo, OB y OC , se mantiene constante durante el movimiento. Por tal motivo, la ecuación de restricción que se plantea está basada en el producto escalar de los vectores unitarios \mathbf{b} y \mathbf{c} :

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \text{cos}\alpha_2 \quad (2)$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación anterior y realizando las simplificaciones necesarias, se obtiene la siguiente ecuación, Medellín (2001):

$$A_1 \text{sen}\phi + B_1 \text{cos}\phi + C_1 = 0 \quad (3)$$

en donde:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \text{sen}\alpha_1 \text{sen}\alpha_3 \text{sen}\theta \\ B_1 &\equiv \text{cos}\alpha_1 \text{sen}\alpha_3 \text{sen}\alpha_4 - \text{sen}\alpha_1 \text{sen}\alpha_3 \text{cos}\alpha_4 \text{cos}\theta \\ C_1 &\equiv \text{cos}\alpha_1 \text{cos}\alpha_3 \text{cos}\alpha_4 + \text{sen}\alpha_1 \text{cos}\alpha_3 \text{sen}\alpha_4 \text{cos}\theta - \text{cos}\alpha_2 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación (3), de acuerdo a Gupta (1997), es:

$$\phi = 2 \arctan \left(\frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1^2}}{C_1 - B_1} \right) \quad (4)$$

La ecuación (4) relaciona el movimiento de entrada con el movimiento de salida, y será utilizada posteriormente en el análisis de movilidad del mecanismo.

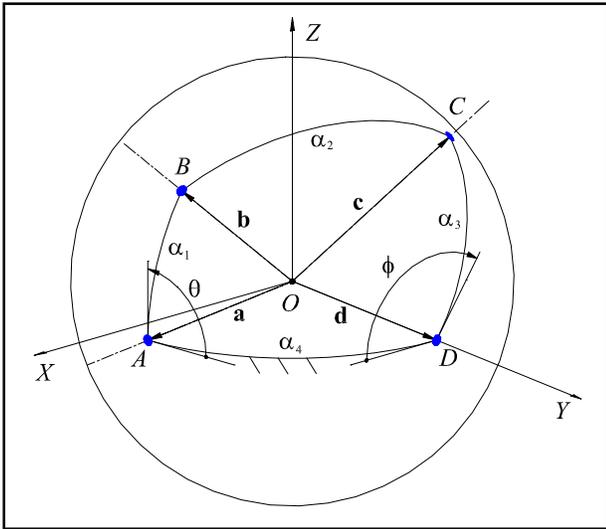


Figura 2. Diagrama cinemático auxiliar.

Desplazamiento del eslabón acoplador respecto al eslabón de entrada

El desplazamiento del eslabón acoplador respecto al eslabón de entrada se define mediante el ángulo β , siendo éste el ángulo formado entre la tangente al eslabón de entrada y la tangente al eslabón acoplador en el punto de intersección B . También, este ángulo puede ser visto como el ángulo que forman los planos OAB y OBC , en el eje de intersección OB , como se muestra en la Fig. 3. Para hallar una relación entre el ángulo β y los parámetros del mecanismo se plantea la siguiente ecuación basándose en el producto escalar de los vectores representados en la Fig. 4

$$\cos \beta = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{m}_1) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{m}_2)}{|\mathbf{a} - \mathbf{m}_1| |\mathbf{c} - \mathbf{m}_2|} \quad (5)$$

en donde los vectores \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 pueden obtenerse de la siguiente manera:

$$\mathbf{m}_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{m}_2 = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \quad (6)$$

Los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} se obtienen mediante las expresiones (1). Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (5) y realizando simplificaciones, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\cos \beta = \frac{\text{sen} \alpha_3 \text{sen} \alpha_4 \cos \phi + \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2} \quad (7)$$

La ecuación (7) será esencial para encontrar relaciones importantes entre los ángulos β y ϕ , como se verá en el análisis de movilidad.

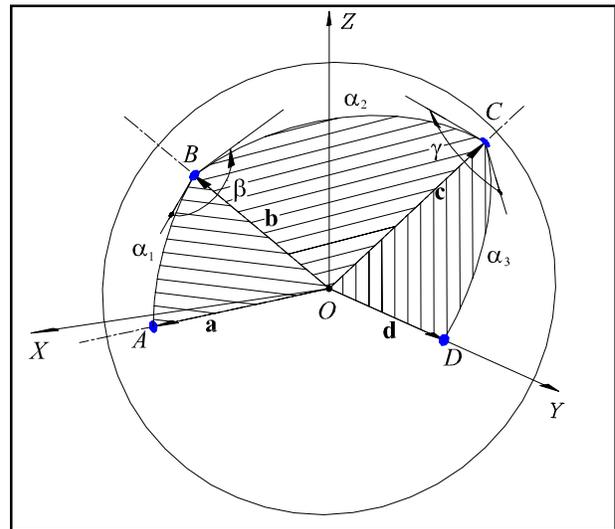


Figura 3. Ángulos acopladores β y γ .

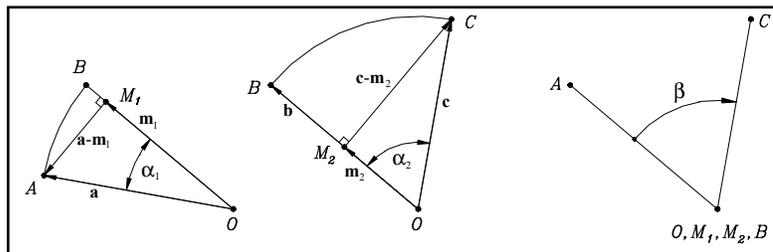


Figura 4. Ángulo acoplador β medido respecto al eslabón de entrada.

Desplazamiento del eslabón acoplador respecto al eslabón de salida

El movimiento del eslabón acoplador respecto al eslabón de salida se representa mediante el ángulo γ . Considerando este ángulo como el formado entre los planos OBC y OCD , como

se muestra en la Fig. 3, se propone la siguiente expresión basada en el producto escalar entre los vectores mostrados en la Fig. 5.

$$\cos \gamma = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{n}_1) \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{n}_2)}{\|\mathbf{b} - \mathbf{n}_1\| \|\mathbf{d} - \mathbf{n}_2\|} \quad (8)$$

Ahora los vectores \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 se definen de la siguiente manera:

$$\mathbf{n}_1 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_2 = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \quad (9)$$

Sustituyendo los valores respectivos en la ecuación (8) y realizando las simplificaciones correspondientes, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\cos \gamma = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_4 + \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_4 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3} \quad (10)$$

Esta ecuación permite determinar el valor del ángulo γ y será utilizada posteriormente en el análisis de movilidad.

Desplazamiento del eslabón de salida

Mediante un procedimiento similar al realizado en el análisis de desplazamiento del eslabón de entrada, se encuentra la siguiente relación para determinar el desplazamiento del eslabón de salida,

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{C_2 - B_2} \right) \quad (11)$$

en donde:

$$A_2 \equiv \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_3 \text{sen} \phi$$

$$B_2 \equiv \text{sen} \alpha_1 (\cos \alpha_3 \text{sen} \alpha_4 - \text{sen} \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \phi)$$

$$C_2 \equiv \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 + \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_3 \text{sen} \alpha_4 \cos \phi - \cos \alpha_2$$

Mediante la expresión (11) se analizará la movilidad del eslabón de salida, como se presenta en el análisis de desplazamiento.

ANÁLISIS DE MOVILIDAD

Previo al análisis de desplazamiento, se presentan las condiciones de ensamble y movilidad del mecanismo.

Condiciones de ensamble y movilidad global

Debido a que no cualquier conjunto de eslabones forman un cuadrilátero esférico, se presentan a continuación las condiciones de ensamble para el mecanismo esférico 4R, Medellín (2001):

1. Si $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) > 360^\circ$, el mecanismo puede ser ensamblado.
2. Si $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 360^\circ$, el mecanismo puede ser ensamblado y además alcanzar una configuración en la cual los eslabones se alinean para formar un círculo máximo.
3. Si $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) < 360^\circ$, el mecanismo podrá ser ensamblado sólo si:
 - (a) La longitud de arco de un eslabón es igual a la suma de las longitudes de los eslabones restantes. Bajo estas condiciones el mecanismo se ensambla con todos sus eslabones alineados y su movilidad es nula, o
 - (b) Cualquier longitud de arco de un eslabón es menor que la suma de los otros restantes, esto es; si las condiciones siguientes se satisfacen:

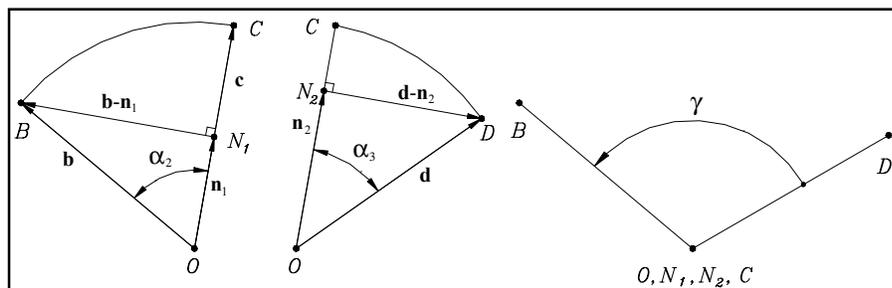


Figura 5. Ángulo acoplador γ medido respecto al eslabón de salida.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &< \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_2 &< \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 &< \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_4 &< \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\end{aligned}\quad (12)$$

Las ecuaciones (12) ayudan a definir un cuadrilátero esférico, por lo que pueden ser utilizadas para garantizar cierta movilidad global del mecanismo.

Movilidad del eslabón de entrada

La movilidad del eslabón de entrada puede analizarse a partir de la ecuación (4) la cual contiene un discriminante en función del movimiento de entrada θ y de las longitudes de los eslabones del mecanismo. Cuando este discriminante tiene un valor mayor que cero, el eslabón de entrada se encuentra dentro de su región de movilidad. Si el discriminante es un valor negativo, el ángulo de entrada θ cae fuera del rango de movilidad del eslabón de entrada, por lo que éste no podrá alcanzar dicha configuración. La región de movilidad (discriminante positivo) y la región de no-movilidad (discriminante negativo) se encuentran separadas por las posiciones límite del eslabón de entrada, y éstas pueden ser obtenidas al resolver el discriminante, $A_1^2 + B_1^2 - C_1^2 = 0$. Resolviendo esta ecuación para θ , se obtiene que las raíces son:

$$\cos\theta = \frac{-\cos\alpha_1 \cos\alpha_4 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \pm \text{sen}\alpha_2 \text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\alpha_1 \text{sen}\alpha_4} \quad (13)$$

Las posiciones límite del rango de movilidad del eslabón de entrada se obtienen al considerar el signo “+” y el signo “-” de la ecuación anterior, esto es:

$$\cos\theta_{\min} = \frac{\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - \cos\alpha_1 \cos\alpha_4}{\text{sen}\alpha_1 \text{sen}\alpha_4} \quad (14)$$

$$\cos\theta_{\max} = \frac{\cos(\alpha_3 + \alpha_2) - \cos\alpha_1 \cos\alpha_4}{\text{sen}\alpha_1 \text{sen}\alpha_4} \quad (15)$$

Debido a que la función coseno no distingue entre ángulos positivos y ángulos negativos, es posible tener hasta cuatro posiciones límite del eslabón de entrada, θ_{\min} , θ_{\max} , $-\theta_{\min}$ y $-\theta_{\max}$. Además, el valor θ_{\min} define el menor ángulo positivo que el eslabón de entrada puede alcanzar relativo al eslabón fijo, mientras que θ_{\max} determina el mayor ángulo positivo. Debe notarse que estas posiciones límite se alcanzan cuando el eslabón acoplador y el eslabón de salida se alinean para formar un triángulo esférico.

Cuando $\cos\theta_{\min} \geq 1$ la posición límite inferior no existe, mientras que cuando $\cos\theta_{\max} \leq -1$ la posición límite superior no existe. Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones (14) y (15), realizando simplificaciones, y considerando que todas las longitudes de los eslabones están en un intervalo de $[0^\circ, 180^\circ]$ para garantizar que el denominador sea positivo, se encuentran las siguientes expresiones,

$$\cos(\alpha_3 - \alpha_2) \geq \cos(\alpha_4 - \alpha_1) \quad (16)$$

$$\cos(\alpha_3 + \alpha_2) \leq \cos(\alpha_4 + \alpha_1) \quad (17)$$

Estas dos ecuaciones representan las condiciones de movilidad del eslabón de entrada. La ecuación (16) es la condición para la no-existencia del límite inferior θ_{\min} , por lo que al cumplirse ésta, el eslabón de entrada no tiene una posición límite inferior en su intervalo de movimiento y puede alcanzar la posición $\theta = 0^\circ$. Por su parte, la ecuación (17) representa la condición para la no-existencia del límite superior θ_{\max} y el eslabón de entrada puede alcanzar la posición $\theta = 180^\circ$.

Movilidad del eslabón acoplador relativa al eslabón de entrada

De la ecuación (7) se puede observar que las posiciones límite del movimiento del eslabón acoplador relativo al eslabón de entrada ocurren cuando el ángulo de salida toma valores de $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 180^\circ$, esto es, cuando los eslabones de salida y fijo se alinean. Sustituyendo estos valores del ángulo de salida en la ecuación (7) y simplificando se obtiene:

$$\cos \beta_{\min} = \frac{\cos(\alpha_4 - \alpha_3) - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2} \quad (18)$$

$$\cos \beta_{\max} = \frac{\cos(\alpha_4 + \alpha_3) - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2} \quad (19)$$

Como se mencionó anteriormente, la función coseno es doblemente valuada, por lo que es posible tener hasta cuatro posiciones límite, β_{\min} , β_{\max} , $-\beta_{\min}$ y $-\beta_{\max}$. Estos ángulos límite definen el intervalo de movimiento del eslabón acoplador con respecto al eslabón de entrada, y tendrán valores reales sólo si la función coseno asociada toma un valor en el intervalo de $[-1, 1]$.

Si $\beta_{\min} \geq 1$, la posición límite inferior no existe, mientras que si $\beta_{\max} \leq -1$ la posición límite superior no existe. Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones (18) y (19), suponiendo que las longitudes de los eslabones del mecanismo están en el intervalo de $[0^\circ, 180^\circ]$, y después de varias simplificaciones, se obtiene las siguientes expresiones:

$$\cos(\alpha_4 - \alpha_3) \geq \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (20)$$

$$\cos(\alpha_4 + \alpha_3) \leq \cos(\alpha_2 + \alpha_1) \quad (21)$$

Las ecuaciones (20) y (21) representan las condiciones de movilidad del eslabón acoplador relativo al eslabón de entrada. La ecuación (20) garantiza la no-existencia del límite inferior del intervalo de movimiento relativo, y el eslabón acoplador puede alcanzar la posición $\beta = 0^\circ$. A su vez, al satisfacerse la ecuación (21) el límite superior no existe y el eslabón acoplador puede alcanzar la posición $\beta = 180^\circ$.

Movilidad del eslabón acoplador relativa al eslabón de salida

El movimiento del eslabón acoplador relativo al eslabón de salida puede describirse mediante la ecuación (10). En esta ecuación se puede observar que el ángulo acoplador γ es una función del ángulo de entrada θ , y que los valores límites ocurrirán cuando este ángulo de entrada alcance los valores de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$.

Al sustituir estos valores en la ecuación (10) se tiene que,

$$\cos \gamma_{\min} = \frac{\cos(\alpha_4 - \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3} \quad (22)$$

$$\cos \gamma_{\max} = \frac{\cos(\alpha_4 + \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3} \quad (23)$$

Las ecuaciones (22) y (23) representan las posiciones límites del intervalo de movimiento del eslabón acoplador respecto al eslabón de salida. De manera similar, se tiene que pueden existir hasta cuatro posiciones límites, γ_{\min} , γ_{\max} , $-\gamma_{\min}$ y $-\gamma_{\max}$. El ángulo γ_{\min} representa el menor ángulo positivo y el ángulo γ_{\max} el mayor ángulo positivo. Se observa además que estos límites ocurren cuando los eslabones de entrada y fijo se alinean. Cuando $\cos \gamma_{\min} \geq 1$ el límite inferior no existe, mientras que cuando $\cos \gamma_{\max} \leq -1$ el límite superior no existe. Sustituyendo estas dos condiciones en las ecuaciones (22) y (23), suponiendo longitudes de eslabones en el intervalo de $[0^\circ, 180^\circ]$, y realizando algunas simplificaciones, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\cos(\alpha_4 - \alpha_1) \geq \cos(\alpha_3 - \alpha_2) \quad (24)$$

$$\cos(\alpha_4 + \alpha_1) \leq \cos(\alpha_3 + \alpha_2) \quad (25)$$

Las ecuaciones (24) y (25) son las condiciones de movilidad del eslabón acoplador relativo al eslabón de salida, bajo estas condiciones el eslabón acoplador no tendrá posiciones límite en su espacio de movimiento relativo. Al cumplirse la condición (24) el ángulo γ puede alcanzar un valor de 0° , y cuando la condición (25) se cumple, éste puede alcanzar un valor de 180° .

Movilidad del eslabón de salida

Para conocer la región de movilidad de eslabón de salida, se realiza un procedimiento similar al realizado para el eslabón de entrada, pero en este caso el discriminante a resolver es el de la ecuación (11), ya que éste está en función del ángulo de salida ϕ . Resolviendo dicho dis-

criminante se obtienen las posiciones límite del intervalo de movimiento del eslabón de salida,

$$\cos \phi_{\min} = \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \cos \alpha_3 \cos \alpha_4}{\text{sen} \alpha_3 \text{sen} \alpha_4} \quad (26)$$

$$\cos \phi_{\max} = \frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_1) - \cos \alpha_3 \cos \alpha_4}{\text{sen} \alpha_3 \text{sen} \alpha_4} \quad (27)$$

La función coseno es una función doblemente valuada, por lo que es posible tener hasta cuatro posiciones límite, ϕ_{\max} , ϕ_{\min} , $-\phi_{\max}$ y $-\phi_{\min}$, que serán reales sólo si sus respectivas funciones coseno asociadas toman valores en el rango $[-1,1]$. También se observa que estos límites ocurren cuando el eslabón de entrada y el eslabón acoplador se alinean para formar un triángulo esférico. Analizando las ecuaciones (26) y (27), se obtienen las condiciones de movilidad para el movimiento del eslabón de salida,

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \geq \cos(\alpha_4 - \alpha_3) \quad (28)$$

$$\cos(\alpha_2 + \alpha_1) \leq \cos(\alpha_4 + \alpha_3) \quad (29)$$

La ecuación (28) representa la condición para la no-existencia del límite inferior ϕ_{\min} , por lo que el eslabón de salida podrá alcanzar la posición $\phi = 0^\circ$. Por su parte la ecuación (29) garantiza la no-existencia del límite superior ϕ_{\max} y el eslabón de salida alcanzará la posición $\phi = 180^\circ$.

Condiciones de movilidad equivalentes

Las condiciones de movilidad obtenidas anteriormente, ecuaciones (16), (17), (20), (21), (24), (25), (28) y (29), permiten conocer la movilidad o intervalo de movimiento de cada uno de los eslabones del mecanismo esférico 4R. Debido a la importancia de estas condiciones, es deseable expresar éstas en función únicamente de las dimensiones de los eslabones; para ello se utiliza un proceso de simplificación similar al presentado por McCarthy (2000) y Gupta y R. Ma. (1995) para obtener el conjunto de condiciones de movilidad equivalentes que se presenta a continuación:

$$\theta_{\min} : (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad AB \leq 0 \quad (30)$$

$$\theta_{\max} : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi)(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad CD \leq 0 \quad (31)$$

$$\beta_{\min} : (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad BD \leq 0 \quad (32)$$

$$\beta_{\max} : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi)(-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad CA \leq 0 \quad (33)$$

$$\gamma_{\min} : (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad A(-B) \leq 0 \quad (34)$$

$$\gamma_{\max} : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi)(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad C(-D) \leq 0 \quad (35)$$

$$\phi_{\min} : (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad B(-D) \leq 0 \quad (36)$$

$$\phi_{\max} : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \leq 0 \quad \text{ó} \quad C(-A) \leq 0 \quad (37)$$

en donde:

$$A \equiv -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$B \equiv \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$$

$$C \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi$$

$$D \equiv -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$$

Puede notarse que en las condiciones anteriores solamente se encuentran involucrados cuatro parámetros diferentes, A , B , C y D , y éstos a su vez sólo dependen de las longitudes de los eslabones. La movilidad del mecanismo esférico 4R puede analizarse mediante este conjunto de condiciones, razón por la cual a estas condiciones se les llama *Condiciones de Movilidad Global*, de acuerdo a Medellín (2001). Debido a las consideraciones hechas en los análisis anteriores de movilidad, estas condiciones solamente son válidas para mecanismos en los cuales cada una de las longitudes de sus eslabones está en el intervalo de $[0^\circ, 180^\circ]$ o $[0, \pi]$ rad. Una observación importante es que las condiciones (30) y (34), (31) y (35), (32) y (36), y (33) y (37) son, respectivamente, una opuesta que la otra. Lo anterior indica que la no-existencia de una cierta posición límite implica la existencia de su correspondiente posición límite opuesta. Sin embargo, ocurren casos especiales cuando las condiciones se satisfacen con el símbolo de igualdad, lo cual lleva a la no-existencia de las dos posiciones límite opuestas; como ocurre en los mecanismos conocidos como *folding*, citados por Ruth y McCarthy (1999).

En las Figs. 6, 6(a), 6(b), 6(c) y 6(d) se muestran diversos ejemplos de las configura-

ciones del mecanismo al alcanzar algunas de las posiciones límite del movimiento de los eslabones.

DIAGRAMAS DE MOVILIDAD

Con el propósito de representar la movilidad del mecanismo esférico 4R en forma gráfica, las condiciones de ensamble y los parámetros A , B , C y D que definen las condiciones de movilidad global, serán graficados en *diagramas de movilidad* como lo reporta Medellín (2001). Cada diagrama es una gráfica en donde el eje de las abscisas representa la longitud del eslabón de salida (α_3) y el eje de las ordenadas es la longi-

tud del eslabón acoplador (α_2). Debido a que sólo se grafica en el plano α_3 - α_2 , se tendrán varios casos de diagramas de movilidad dependiendo de los valores que tomen α_1 y α_4 .

De las condiciones de ensamble mostradas anteriormente se observa que cuando en un mecanismo se cumple que $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \geq 2\pi$ rad, entonces dicho mecanismo podrá ser ensamblado. Sin embargo, cuando se tiene que $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) < 2\pi$ rad, entonces el mecanismo debe cumplir con las condiciones de la ec.(12) para que pueda ser ensamblado. En la Fig. 7 se muestran estas condiciones representadas de manera gráfica en el plano α_3 - α_2 . La Fig. 7(a) muestra el caso para cuando $\alpha_4 > \alpha_1$, y la

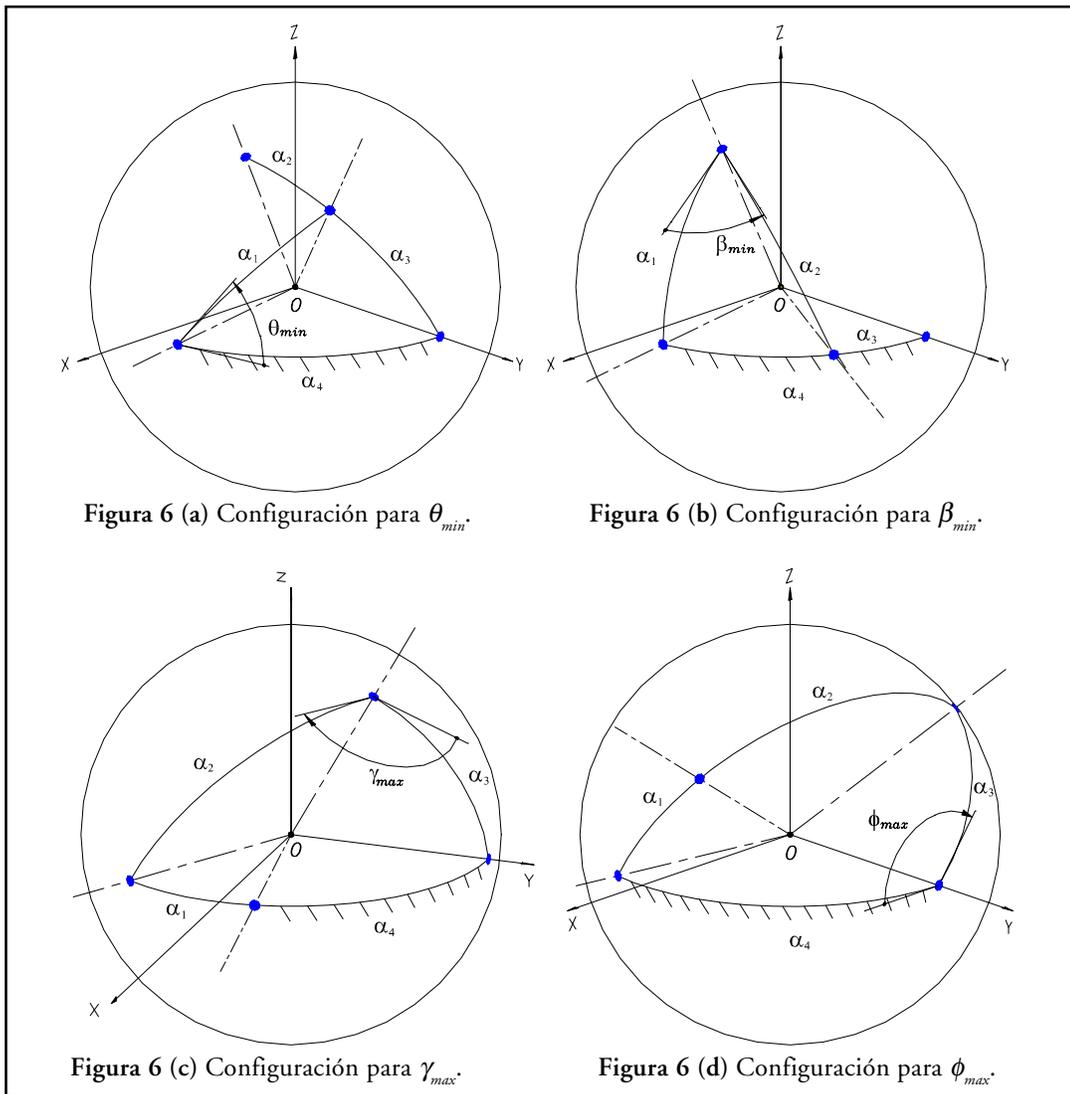


Figura 6. Configuraciones del mecanismo en algunas posiciones límite.

Fig. 7(b) muestra el caso para cuando $\alpha_4 < \alpha_1$. Como se puede observar en estas figuras, las condiciones de la ec.(12) sólo son válidas hasta la línea en la cual $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 2\pi$ rad. La región en donde las condiciones de ensamble se satisfacen se le llama *región de ensamble*, Medellín (2001), y cualquier punto que esté ubicado sobre las líneas que limitan esta región representará a un mecanismo con movilidad cero.

Los parámetros A, B, C y D pueden representarse de manera gráfica si se iguala cada uno de ellos para graficar la línea recta que divide la región en donde el parámetro es positivo y la región en donde es negativo. Al graficar conjuntamente las condiciones de ensamble y los parámetros A, B, C y D se obtienen los diagramas de movilidad del mecanismo, en donde es posible identificar el tipo de movimiento que tendrá un mecanismo de acuerdo a las dimensiones de sus eslabones. La Fig. 8 se muestra el diagrama de movilidad para el caso en el que $\alpha_4 > \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 < \pi$ y en la Fig. 9 se muestra el caso cuando $\alpha_4 < \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 < \pi$. En estos diagramas de movilidad sólo se mues-

tra el intervalo de movimiento de los eslabones de entrada (θ) y de salida (ϕ), sin embargo, con los valores de los parámetros y con base en las condiciones de movilidad es posible conocer los intervalos del movimiento relativo del eslabón acoplador. Debido a que las condiciones de movilidad sólo son aplicables a mecanismos con longitudes de los eslabones en el intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$ o $[0, \pi]$ rad, los diagramas de movilidad están limitados hasta la línea punteada para la cual $\alpha_2 = \pi$ y $\alpha_3 = \pi$. Debido a que los eslabones α_1 y α_4 pueden tener diferentes valores, existen varios casos de diagramas de movilidad dependiendo de dichos valores. En la Fig. 10 se muestra el caso en que $\alpha_4 > \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$, y en la Fig. 11 se muestra el caso para cuando $\alpha_4 < \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$.

Los diagramas de movilidad pueden considerarse como un atlas del movimiento del mecanismo. Estos diagramas pueden usarse en el diseño de los mecanismos esféricos 4R, ya que dados los valores de α_1 y α_4 se pueden encontrar los valores de α_2 y α_3 que generen cierto tipo de movimiento deseado.

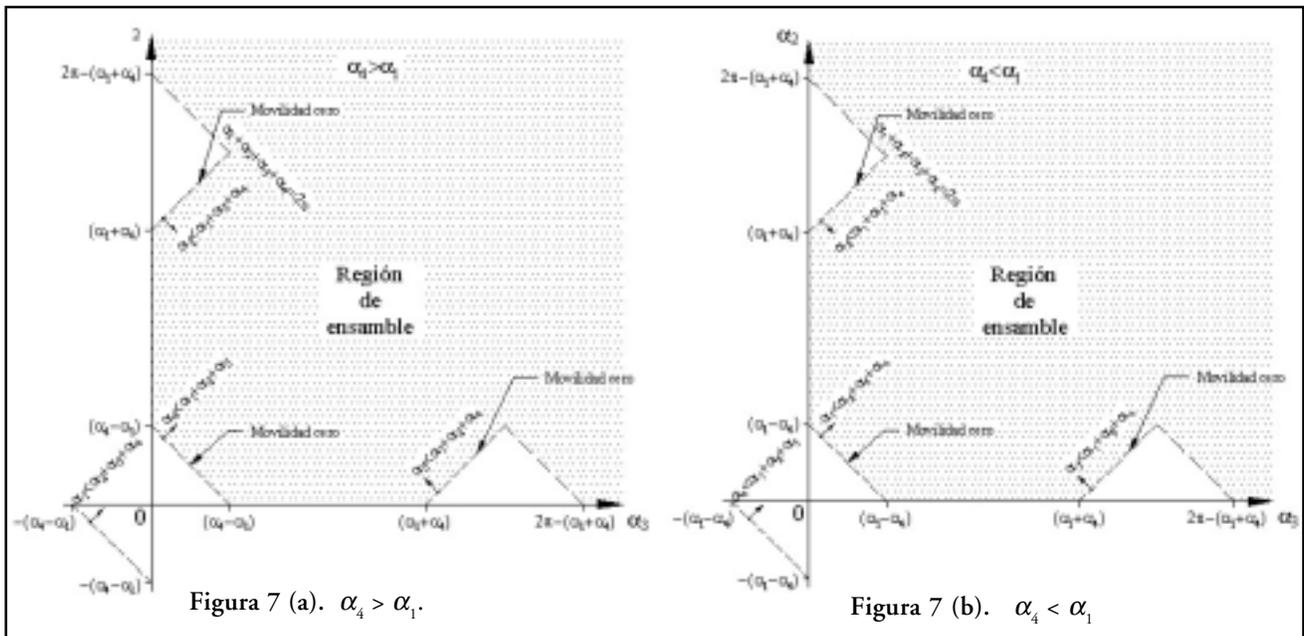


Figura 7. Representación de las condiciones de ensamble.

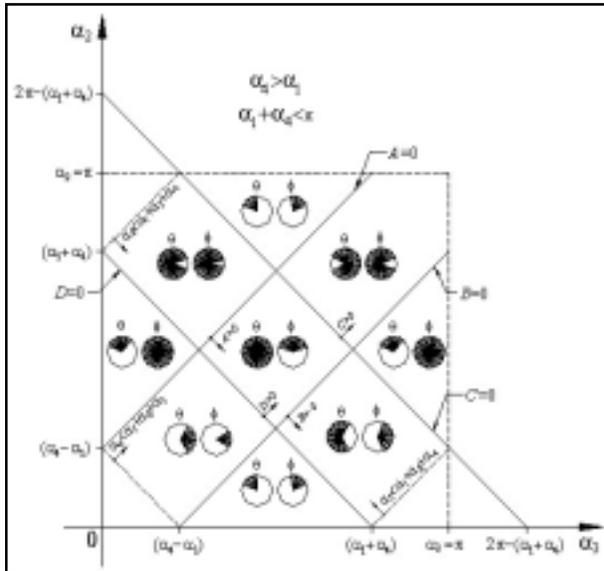


Figura 8. Diagrama de movilidad cuando $\alpha_4 > \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 < \pi$.

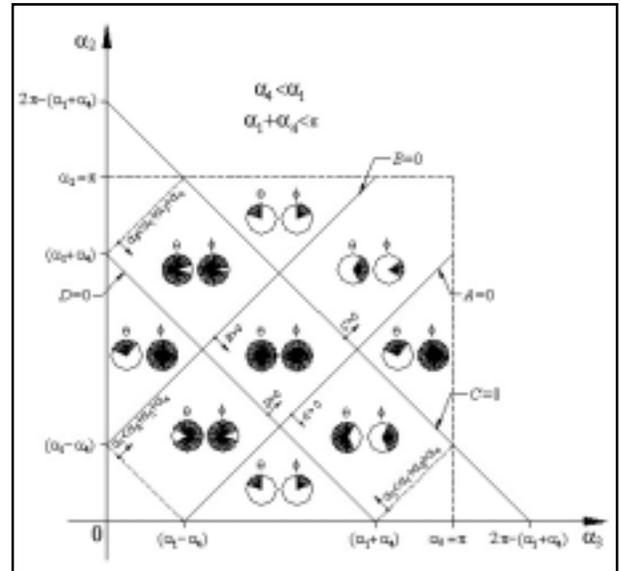


Figura 9. Diagrama de movilidad cuando $\alpha_4 < \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 < \pi$.

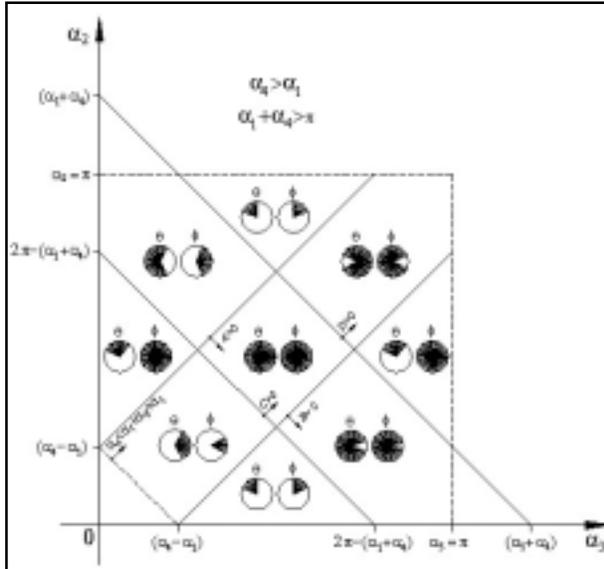


Figura 10. Diagrama de movilidad cuando $\alpha_4 > \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$.

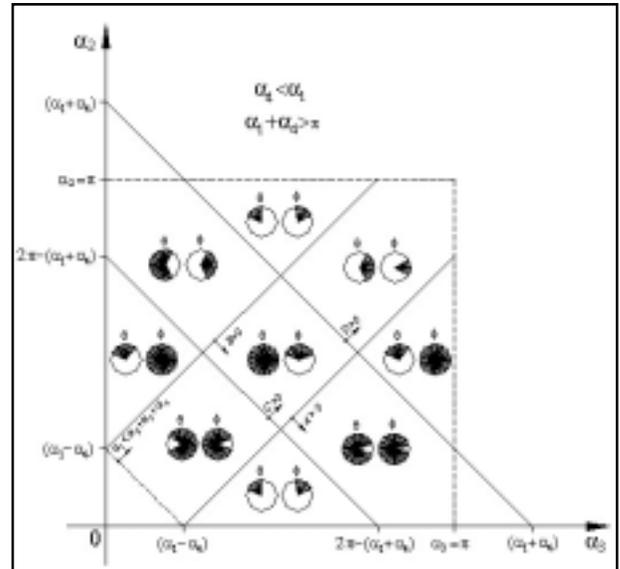


Figura 11. Diagrama de movilidad cuando $\alpha_4 < \alpha_1$ y $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$.

CONCLUSIONES

Se presentó un análisis de movilidad que considera todos los movimientos relativos entre los eslabones adyacentes del mecanismo. De este análisis se obtuvieron las condiciones de movilidad global que permiten identificar de una manera sencilla, el tipo de movimiento que tendrá cada eslabón, sólo con conocer las dimensiones del mecanismo. También se representaron estas condiciones en diagramas de movilidad. Éstos pueden utilizarse ya sea para determinar la movilidad del mecanismo o para determinar las dimensiones de un mecanismo que produzcan cierto tipo de movimiento deseado. Además, se presentaron las condiciones de ensamble del mecanismo las cuales garantizan que un mecanismo pueda ser ensamblado y que además tenga algo de movilidad global.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT) por el apoyo otorgado durante la realización del trabajo.

REFERENCIAS

Chiang C.H., (1984). On the Classification of Spherical Four Bar Linkages. *Mechanism and Machine Theory*, vol.19, no. 3, 283-287.

Freudenstein F., (1965). On the Determination of the Type of Spherical Four-Link Mechanism. *Contemporary Problems in the Theory of Machines and Mechanisms*, Academy of Sciences of USSR, 193-196.

Gosselin G. y Angeles J. (1987). Représentation Graphique de la Région de Mobilité des Mécanismes Plans et Sphériques a Barres Articulees. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 22, no. 6, 557-562.

Gupta K.C. (1986). Rotability Considerations for Spherical Four-Bar Linkages with Applications to Robot Wrist Design. *Trans. ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol. 108, 387-391.

Gupta K.C. (1997). *Mechanics and Control of Robots*. Springer.

Gupta K.C. y Ma R. (1995). A Direct Rotatability Criterion for Spherical Four-Bar Linkages. *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design*, vol. 117, 597-600.

Lu D.M. y Hwang W.M. (1996). Spherical Four-Bar Linkages with Symmetrical Coupler-Curves. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 31, no. 1, 1-10.

Mallik A.K. (1994). Mobility Analysis and Type Identification of Four-Link Mechanisms. *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design*, vol.116, 629-633.

McCarthy J.M. (2000), *Geometric Design of Linkages*. Springer.

Medellín Castillo H.I.(2001). Clasificación, Análisis de Desplazamiento, Ramificación y Singularidad del Mecanismo Esférico tipo 4R. *Tesis de Maestría*, Universidad de Guanajuato, México.

Ruth D.A. y McCarthy J.M. (1999). The Design of Spherical 4R Linkages for Four Specified Orientations. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, 677-692.

Savage M. y Hall A.S. (1970). Unique Descriptions of All Spherical Four-Bar Linkages. *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, vol.92, 559-563.

Soni A.H. (1970). Discussion. *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, vol.92, 563-566.