No. 36 | 2026
ISSN Online 2007-9621
http://doi.org/10.15174/au.2026.4378

Acta Universitaria
Multidisciplinary Scientific Journal

Didáctica de formularios y procedimientos algebraicos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral

Didactics of forms and algebraic procedures in the teaching of differential and integral calculus

Mario A. Sandoval-Hernandez[1], Hugo Jiménez-Islas[2]*, Gloria M. Martínez-González[2], Miriam L. Quemada-Villagomez[2], Héctor Vázquez-Leal[3]

[1] Centro de Bachillerato Tecnológico industrial de servicios No. 190., CP. 94297 Boca del Río, Veracruz.
xallitic476@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5518-3858
[2] Tecnológico Nacional de México en Celaya, CP. 38010 Celaya, Guanajuato.
hugo.jimenez@itcelaya.edu.mx, ORCID: 0000-0002-1084-5520
Gloriam@iqcelaya.itc.mx, ORCID: 0000-0002-7314-1379
Miriam.quemada@ itcelaya.edu.mx, ORCID: 0000-0002-5129-442x
[3] Facultad de Instrumentación Electrónica, Universidad Veracruzana. CP. 91090 Xalapa-Enríquez, Veracruz.
hvazquez@uv.mx, ORCID: 0000-0002-7785-5272
*Autor de correspondencia

Resumen

Palabras clave: Cálculo; derivación; integracion; enseñanza; didáctica.

En bachillerato, en cursos de cálculo diferencial, muchos estudiantes presentan dificultades para ejecutar derivaciones e identificar y combinar fórmulas, especialmente en funciones con productos o exponentes fraccionarios. Se realizó una revisión bibliográfica de textos de cálculo de referencia para analizar cómo se presentan estos contenidos. Además, mediante una investigación exploratoria con grupos focales en el CBTis 190, se indagaron las causas de las dificultades iniciales. Con base en los hallazgos, se diseñó una propuesta didáctica para el uso de formularios, incorporando procedimientos algebraicos implicados en la derivación, y con proyección hacia el cálculo integral. Se enfatizó la selección de reglas (producto, potencia y cadena) y la organización del formulario para guiar decisiones paso a paso durante la derivación. Tras su implementación se aplicó una evaluación posterior, observándose una mejora notable, sobre todo en estudiantes con bajo desempeño en el diagnóstico.

Abstract

Keywords: Calculus; derivation, integration; teaching; didactics.

In high school differential calculus courses, many students struggle to differentiate functions and to choose and combine the correct formulas, especially for products and fractional exponents. A literature review of widely used calculus textbooks examined how these topics are presented. In addition, an exploratory study with focus groups at CBTis 190 investigated the reasons for students' initial difficulties. Based on these findings, we designed a teaching proposal for using formula sheets that includes the algebraic steps needed in differentiation and connects this work to integral calculus. The proposal emphasizes selecting key rules (product, power, and chain) and organizing the formula sheet to support clear, step-by-step decisions while differentiating. After the intervention, a follow-up assessment showed a notable improvement, particularly among students who initially scored low on the diagnostic test.

Recibido: 03 de octubre de 2024

Aceptado: 02 de octubre de 2025

Publicado: 25 de marzo de 2026

Cómo citar: Sandoval-Hernandez, M. A.; Jiménez-Islas, H.; Martínez-González, G. M.; Quemada-Villagomez, M. L.; & Vázquez-Leal, H. (2026). Didáctica de formularios y procedimientos algebraicos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral. *Acta Universitaria, 36*, e4378. doi. https://doi.org/10.15174/au.2026.4378

Introducción

Para alcanzar un alto nivel de significatividad en el proceso de aprendizaje, es esencial desarrollarlo como un proceso en el cual el estudiante logre comprender y retener la nueva información a largo plazo, estableciendo conexiones con sus conocimientos previos y forjando una relación personal con el material, las herramientas y la tecnología (Díaz & Hernández, 2010; Zamora *et al.*, 2023).

El aprendizaje significativo, en contraste con el aprendizaje memorístico, se distingue por su efectividad y perdurabilidad, capacitando al estudiante para aplicar lo aprendido en situaciones diversas y novedosas (Díaz & Hernández, 2010; Viera, 2003). En este contexto, el *significado* hace referencia al sentido o comprensión que adquiere un símbolo o conjunto de símbolos cuando el estudiante logra un aprendizaje significativo. No se trata únicamente de la memorización de una forma o notación, sino de la construcción de un contenido conceptual diferenciado que permite relacionar dichos símbolos con ideas, objetos o procesos específicos.

De acuerdo con Ausubel, este proceso corresponde al aprendizaje representacional, en el cual los símbolos se vinculan con significados previamente adquiridos, otorgándoles coherencia y utilidad cognitiva (Viera, 2003), los cuales pueden manifestarse como palabras -o fórmulas, en el caso de las matemáticas (Stewart *et al.*, 2020)-, expresiones lógicas, entre otros. En este proceso, se identifican los símbolos con sus referentes, que pueden ser objetos, eventos o conceptos.

Ausubel focaliza su atención en el aprendizaje significativo dentro del contexto del aprendizaje por recepción, donde los contenidos ya elaborados se exponen y deben ser asimilados por el sujeto en forma de conocimientos. El autor emplea métodos expositivos que buscan que estos contenidos sean potencialmente significativos para el alumno, mediante la asimilación de la palabra (Viera, 2003). El lenguaje desempeña un papel crucial como medio indispensable para transmitir, precisar y esclarecer significados.

En la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje significativo se ve obstaculizado por la presencia del discurso matemático escolar (DME) en las aulas. Este discurso, arraigado en la enseñanza de las matemáticas en diversos niveles educativos, como en el caso del bachillerato, impacta directamente en la enseñanza de los contenidos, los cuales experimentan escasos cambios significativos a pesar de diversas reformas propuestas (Cantoral *et al.*, 2015). El DME es el sistema de razón que, por generaciones, ha dictado argumentos en la enseñanza, significados y procedimientos sin marcos de referencia (Cabrera & Romano, 2024; Soto & Cantoral, 2014; Soto *et al.*, 2012).

La relación del DME con los significados académicos, la experiencia y la formación del docente es evidente (Astudillo *et al.*, 2023). En este sentido, la enseñanza de las matemáticas y del cálculo suele priorizar la resolución de ejercicios, relegando el conocimiento generado por los estudiantes (Arellano *et al.*, 2020).

Es pertinente señalar que los planes de estudio, los cuales estructuran los contenidos programáticos emitidos por las dependencias de educación, delinean la forma en que debe desarrollarse el curso (Astudillo *et al.*, 2023; Sandoval-Hernández *et al.*, 2021a; Sandoval-Hernández *et al.*, 2021b). Asimismo, los libros de texto (Sandoval-Hernández *et al.*, 2022; Soto *et al.*, 2012) y sus ediciones publicadas por distintos autores (Cantoral *et al.*, 2015) están notoriamente influidos por el DME.

En relación con los libros de texto utilizados en las instituciones educativas, se destaca que los autores suponen que el público al cual se dirige su obra posee todo el bagaje académico necesario para abordar su contenido. Sin embargo, la realidad en las escuelas es diferente, ya que los estudiantes presentan diversas necesidades académicas debido a factores como el rezago académico, situaciones socioeconómicas (Mendoza & Zúñiga, 2017; Rivas, 2005) y otros desafíos derivados de la pandemia por covid-19 (Cárdenas-González & Álvarez-Buylla, 2020). Estas circunstancias se reflejan en la forma en que los estudiantes adquieren el conocimiento y en la velocidad con la que lo hacen.

Ante estas dificultades, en la enseñanza del cálculo y de las demás disciplinas de las matemáticas, diversos autores han realizado propuestas para resignificar el DME. Por ejemplo, en el trabajo de Mateus-Nieves (2017) se realizó un análisis didáctico acerca del método de integración por partes en una clase de cálculo integral a nivel licenciatura. En ese estudio se identificaron errores frecuentes que surgen en la aplicación de esta técnica de integración cuando no está clara la selección de u y dv en el integrando.

Además, Mateus-Nieves (2017) destaca que se presenta un conflicto epistémico debido a que el profesor omite la jerarquía en cómo se eligen u y dv, pues simplemente se limita a escogerlo y a resolver la integral. Esta disidencia generalmente ocurre en las clases de cálculo integral, aunado a que algunos autores como Ayres & Mendelson (1994) también eligen u y dv sin dar mayores detalles.

Por otro lado, en Sandoval-Hernández *et al.* (2022) se propuso una estrategia didáctica para escoger u y dv para resolver integrales por el método de integración por partes. En ese trabajo, también se presentó una integral que debía resolverse por fracciones parciales (Collins, 2022) utilizando dos casos: 1) Factores lineales distintos y 2) Factores lineales repetidos de acuerdo con la imposición del DME; sin embargo, esa integral fue resuelta empleando únicamente el caso 1 con ayuda de números complejos.

En el estudio de Bedoya-Rodríguez (2023) se propuso una estrategia didáctica denominada "El Rompecabezas", aplicada a estudiantes de ingeniería industrial en las asignaturas de cálculo diferencial e integral. La propuesta se basa en el aprendizaje basado en juegos (ABJ), el aprendizaje activo y el aprendizaje colaborativo. El Rompecabezas fue implementado por medio de una plantilla digital de rompecabezas con ejercicios de derivación e integración, esto con el fin de mejorar las habilidades y aprendizaje del cálculo.

Recientemente, Jara *et al.* (2024) propusieron una estrategia didáctica para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral, basándose en la modelación matemática de problemas contextualizados a la realidad como recurso pedagógico principal. La propuesta se fundamenta en teorías constructivistas y socio-constructivistas, donde el estudiante es el protagonista de la construcción del conocimiento.

Al mismo tiempo, en el trabajo de Rico (2024) se propone un enfoque teórico integral para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial en educación superior, sustentado en la articulación de tres marcos conceptuales: el pensamiento variacional, el enfoque ontosemiótico y las teorías APOE. El autor destaca como elementos clave la capacitación continua de los docentes en estos enfoques, el diseño de recursos y materiales específicos, la promoción de una cultura institucional que fomente la innovación pedagógica y la implementación de evaluaciones alternativas como portafolios y proyectos.

Por su parte, Cruz & Herrera (2024) plantean que el aprendizaje del cálculo no debe limitarse a la memorización de fórmulas o procedimientos mecánicos, sino que debe promover el desarrollo de competencias matemáticas esenciales: razonamiento lógico, resolución de problemas, pensamiento crítico, comunicación matemática, uso de TIC y aplicación en contextos reales.

No obstante, Barradas (2021) presenta un estudio del impacto que tienen los recursos digitales en la enseñanza del cálculo a nivel medio superior, incorporando el uso de *software* como GeoGebra y Moodle al proceso de enseñanza-aprendizaje, con la finalidad de disminuir los índices de reprobación en la asignatura de cálculo. Los autores concluyen que los recursos digitales son un apoyo valioso para la enseñanza del cálculo, ya que mejoran la comprensión y motivación de los estudiantes. Sin embargo, también aclaran que el éxito de su implementación depende del seguimiento docente, del diseño instruccional adecuado y de la integración de estrategias que fomenten la participación activa y colaborativa.

Es importante mencionar que en otras disciplinas de las matemáticas que se encuentran vinculadas con el cálculo, como el álgebra, también se han planteado propuestas para resignificar el DME. Por ejemplo, en Sandoval-Hernández *et al.* (2021b) se propuso un procedimiento alternativo utilizando números complejos para obtener la fórmula general que resuelve ecuaciones algebraicas de segundo grado. Esta propuesta algebraica resignifica el proceso algebraico conocido (Baldor, 2019) para obtener la fórmula general, evitando guiar a los alumnos a una sola manera de obtenerla.

Materiales y métodos

En este artículo se emplearon dos metodologías distintas. La primera fue de índole bibliográfica, la cual tuvo el propósito de revisar los contenidos relacionados con la derivación en diversos libros de distintos autores y ediciones. Se creó una base de datos en Microsoft Excel que se compuso de 26 libros de cálculo, entre los que destacan el título *Cálculo diferencial e integral* de la Serie Schaum (Ayres & Mendelson, 2013) y algunos que suelen ser utilizados como libros de texto (Collins, 2022) en instituciones educativas de educación media superior y superior.

La segunda metodología utilizada fue cualitativa-exploratoria (Morales, 2015), que se planteó como objetivo recopilar información de los alumnos acerca del uso del formulario de cálculo diferencial y su aplicación en funciones algebraicas. La primera parte de esta metodología consistió en aplicar un examen diagnóstico para medir los conocimientos de los estudiantes, previo a este estudio. En la segunda parte, la técnica empleada para recabar los datos cualitativos consistió en utilizar la metodología de grupos focales (Hamui-Sutton & Varela-Ruiz, 2013; Rodas & Pacheco, 2020). Este enfoque implica una forma de entrevista grupal informal, orientada a que los participantes expresen sus opiniones y percepciones sobre el tema propuesto. Con base en los resultados obtenidos en el examen diagnóstico y el estudio cualitativo, se diseñó una estrategia didáctica para ayudar a mejorar los estudiantes con bajo rendimiento. En la tercera parte, se evaluaron los resultados de los estudiantes después de la aplicación de la estrategia didáctica.

El estudio se llevó a cabo en el Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios (CBTis) No. 190, ubicado en la ciudad de Boca del Rio, Veracruz. Los docentes del turno vespertino que han impartido la asignatura de cálculo diferencial, objeto de este estudio, fueron cuatro, tres hombres y una mujer, con edades de 39 y 46 años. Su perfil profesional fue el siguiente: un ingeniero civil, un ingeniero químico, un ingeniero industrial en producción y un ingeniero en electrónica. Respecto al grado de estudios, uno de ellos contaba con grado de maestría en ingeniería hidráulica, otro con maestría en ingeniería mecánica y uno más con grado de maestría en ciencias en electrónica.

La primera parte de la metodología se llevó a cabo antes de la aplicación del examen del primer parcial, con alumnos de cuarto semestre del turno vespertino. El muestreo se realizó por conveniencia (Otzen & Manterola, 2017). Para ello, se seleccionaron tres alumnos por grupo de desempeño bajo, medio y alto (promedios en los intervalos: 6.00-7.99, 8.00-8.99 y 9.00-10) con el fin de tener una muestra representativa de los rendimientos académicos de los alumnos dentro de los grupos. Los alumnos participantes fueron 12, siete mujeres y cinco hombres, quienes pertenecían a las especialidades de Enfermería General, Informática, Técnico programador y Contabilidad.

El examen diagnóstico consistió en cuatro sentencias compuestas por dos incisos cada una, las cuales consistían en resolver ejercicios básicos de derivación utilizando el formulario de cálculo diferencial. El último ejercicio, de mayor grado de dificultad, consistía en derivar funciones polinomiales empleando la regla de suma que implicaba utilizar álgebra, ley de los signos, ley de los exponentes y la aritmética para simplificar expresiones.

En la metodología cualitativa-exploratoria, el procedimiento consistió en el diseño de los instrumentos de recolección de datos, el examen escrito, el pilotaje, la aplicación del grupo focal y la recolección de los datos. Antes de aplicar la prueba piloto, el instrumento fue validado por dos maestras en el área de educación, con maestría en el área de investigación educativa, expertas en el tema, adscritas a otros planteles de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Así mismo, el instrumento fue validado por dos maestros del Tecnológico Nacional de México en Veracruz, uno con posgrado en Telecomunicaciones y otro con doctorado en Ciencias en Electrónica, y cuatro maestros de la Universidad Veracruzana, uno con maestría en ciencias en electrónica y tres con doctorado en ciencias en electrónica.

En el rubro de la confiabilidad, los instrumentos fueron proporcionados a los docentes que impartían las asignaturas correspondientes y con algunos estudiantes seleccionados a conveniencia para comprobar que las sentencias fueran claras, concisas y que los temas que se inspeccionaron corresponden al primer parcial de la asignatura de cálculo diferencial.

El lugar donde se llevó a cabo todo el procedimiento de este estudio fue en la biblioteca del plantel. Primero, la aplicación del instrumento de diagnóstico fue aplicado por un docente con el apoyo de la bibliotecaria. Posteriormente, la guía de tópicos de la entrevista fue aplicada por los estudiantes de servicio social provenientes de la Universidad Veracruzana, con el apoyo de la bibliotecaria.

El moderador fue un docente de la academia de matemáticas del turno matutino, quien condujo la sesión, generando un ambiente de confianza al decir que este examen era un diagnóstico y que no interferiría con su calificación. La finalidad era proporcionar una mejor enseñanza a los alumnos en esas asignaturas. La sesión se condujo con una discusión generada por medio de preguntas abiertas con el apoyo de dos estudiantes de servicio social. Uno de ellos fungió como secretario y el otro como observador del ambiente.

La aplicación del instrumento duró 25 minutos. Después, el grupo focal tuvo una participación aproximada de 50 minutos. Las discusiones fueron grabadas por medio de un teléfono celular. Posterior a la sesión, se calificó el examen diagnóstico y la información fue transcrita en el procesador de texto de Microsoft Word.

En la revisión teórica, emergieron las categorías de análisis y los códigos validados por el equipo de investigación. Recabada la información más relevante de los testimonios de los participantes, expertos llevaron a cabo los análisis sobre la derivación elemental, así como sobre el uso del formulario de derivadas.

Los materiales y equipo fueron hojas bond y plumones de colores, los cuales se utilizaron para realizar el formulario de derivadas. Se empleó Microsoft Word para escribir el examen diagnóstico y Microsoft Excel para la base de datos de las referencias consultadas. Esto se realizó en una computadora con procesador Intel i3 con 8GB de Memoria RAM y sistema operativo Windows 10. Se utilizó el *software* MAXQDA Analytics Pro 2020 para el análisis cualitativo.

Resultados

En primer lugar, se procedió a revisar los resultados del examen de diagnóstico una vez finalizada la sesión con el grupo focal. La Figura 1 presenta el histograma que ilustra el número de alumnos que respondieron correctamente en relación con el número de preguntas, según sus niveles de desempeño en la institución. Por ejemplo, para la pregunta 1, los cuatro alumnos de alto rendimiento respondieron correctamente, tres alumnos de desempeño medio también acertaron, mientras que solo dos estudiantes de bajo rendimiento pudieron contestar correctamente. Se destaca que, en relación con la pregunta 4, la cual tenía un nivel mayor de dificultad, tres alumnos de alto rendimiento la respondieron correctamente, uno de desempeño regular acertó y ningún estudiante de bajo rendimiento respondió correctamente. Estos resultados reflejan un considerable rezago académico de los alumnos, lo cual se correlaciona con el contexto y los impactos de la pandemia mundial por covid-19.

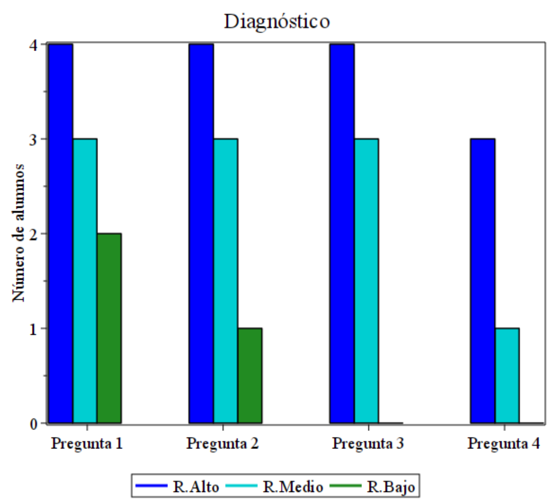

Figura 1. Histograma del número de aciertos obtenidos.
Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis cualitativo realizado en MAXQDA, la codificación para las categorías fue la siguiente: Conocimientos previos, Aprendizaje significativo, Discurso matemático escolar y Recursos didácticos. Las subcategorías fueron: Aprendizaje significativo/Aprendizaje significativo del alumno, Aprendizaje significativo/Activación de significados, DME/Desconexión de significados, DME/Centrado en el objeto, DME/Utilitario. Asimismo, en el *software*, cada participante y cada código fueron asignados con un color distinto para incrementar la claridad del análisis cualitativo.

Iniciando el análisis correspondiente, para la pregunta 1: *¿Qué ejercicio del examen les pareció más complicado y explica por qué?*, todos los alumnos indicaron que fue el último, pues implicó el uso de otros procedimientos como las operaciones algebraicas y aritméticas, así como la aplicación de las demás fórmulas de derivación. Este argumento concuerda con el análisis presentado en la Figura 1. En este caso, de los estudiantes de alto desempeño, uno falló la última pregunta, mientras que solo uno de los estudiantes de medio desempeño lo respondió correctamente. Ninguno de los estudiantes de bajo desempeño fue capaz de contestarlo.

Referente a la pregunta: *¿El maestro les dio algún repaso de álgebra o algún tema relacionado con cálculo diferencial?*, todos los alumnos dijeron que sí; sin embargo, de acuerdo con el análisis del contenido del discurso de los alumnos, se muestra que el repaso se da al inicio del semestre, aunque algunos maestros lo hacen cuando inician un tema nuevo con el fin de reactivar los conocimientos previos. De los cuatro maestros que dan clase, tres lo hacen al inicio y uno lo hace de manera general cada vez que inicia un tema o cuando considera que es necesario hacerlo. Aquí es oportuno señalar que, a pesar de que se realiza esta actividad, no se alcanza a tener una reactivación significativa porque el DME se encuentra presente. El estudiante E3 dijo que le entiende a todo, y que, efectivamente, el profesor da un repaso al inicio del semestre.

Por otro lado, el estudiante E12 no logró comprender la aplicación de las fórmulas, a pesar de que el maestro da un repaso de los temas que deben saber, es decir, los que se abordaron en semestres pasados. De los cuatro alumnos que tienen buen rendimiento escolar, tres de ellos respondieron todo el examen correctamente, mostrando que sí comprendieron los procesos iniciales de derivación.

El alumno E10 comentó que, aunque resolvió algunos ejercicios, lo hizo de memoria, recordando el proceso de solución, pero sin comprender el fundamento. Cabe señalar que, pese al repaso realizado, los estudiantes no lograron reactivar de manera eficaz sus conocimientos previos porque los significados no fueron significativos cuando estos fueron aprendidos.

De acuerdo con el análisis realizado, algunas opiniones extraídas del *software* son las siguientes: “Nuestro maestro nos enreda porque luego se hace bolas. Se equivoca mucho, borra y vuelve a escribir. Posteriormente le preguntamos y nos hace más bolas porque nos lo explica de otra manera” (E4), “me confundí” (E6), “llenaba el pizarrón” (E5). Estas opiniones concuerdan con los aciertos obtenidos en el examen de diagnóstico (Figura 2). En relación con esta pregunta, también hubo opiniones positivas. En el caso del estudiante E6, este argumentó: “Nuestro maestro siempre busca la manera de hacer sus clases claras y busca los medios para que le entendamos”.

No obstante, en el análisis realizado, el DME también influye en la manera en que se usan los recursos didácticos. Nos referimos tanto a las estrategias de enseñanza empleadas y a la manera de utilizar los recursos didácticos. A la luz de este argumento y en el análisis llevado a cabo, algunos alumnos expresaron lo siguiente: “Sí, es muy amable y siempre está pendiente si algo se dificulta. Me gusta cómo enseña, pero sí me cuesta un poco entender la materia” (E1), “Sí, siempre lo hace, siempre cuando tenemos duda o vemos un tema nuevo, nos dice y hace un repaso” (E2), “Nuestro maestro nos enreda porque luego se hace bolas. Se equivoca mucho, luego borra y vuelve a escribir. Luego le preguntamos y nos hace más bolas porque nos lo explica de otra manera” (E4), “Sí, nuestro maestro nos da un repaso al inicio, pero luego se nos olvida” (E7), “El pizarrón prácticamente lo parte a la mitad, del lado izquierdo siempre hace el ejercicio y del lado derecho pone los conocimientos previos que debemos de saber” (E3), “También nos dice que veamos el YouTube, que ahí explican lo que debemos de saber” (E11).

De acuerdo con los argumentos provistos por los alumnos, no es suficiente con dar un repaso a los temas que deben manejar los alumnos para abordar los nuevos conceptos, ya que la estrategia de enseñanza está influenciada por DME, con la imposición de significados y la a*tomización* (Astudillo *et al.*, 2023) de conceptos al no considerar el estrato socioeconómico del que provienen los alumnos. Respecto al uso de recursos didácticos, el alumno E11 menciona que el profesor les dice que vean YouTube porque ahí les pueden explicar los conceptos. Si bien es cierto que en esa plataforma existen videos con información muy valiosa, no hay evidencia de una dosificación o planeación de este recurso que puede utilizarse para un óptimo acompañamiento pedagógico.

En referencia a la pregunta 4: *Cuando comenzaron a derivar, ¿el maestro incluyó el formulario con las fórmulas de derivación? Denme una descripción de cómo era el formulario de derivación que el profesor ocupó*, esta tiene una alta importancia puesto que aquí se pueden indagar los orígenes que impiden que los estudiantes puedan llevar a cabo los procesos iniciales de derivación y avanzar hacia las aplicaciones de la derivada con el de hacer su aprendizaje significativo, debido a que existen aplicaciones en el *cotidiano* inmediato (Sandoval-Hernández *et al.*, 2021a).

Al respecto, los estudiantes respondieron: "Sí, el maestro llegaba siempre con sus formularios en hojas bond y las pegaba. A veces la letra era pequeña y a veces grande" (E1), "El profe llegaba con el formulario al inicio de la clase y lo ponía a un lado del pizarrón" (E2), "Pues el maestro que nos da clase luego llegaba y él las escribía en el pizarrón. Todos los días lo hacía para que las viéramos y aprendiéramos a usarlas, pero siempre usaba el color negro o el azul" (E4), "El profe ponía las fórmulas del lado derecho del pizarrón para que pudiéramos verlas, pero luego nos confundíamos porque se llenaba el pizarrón todo, y teníamos que estar atentos porque se mezclaba todo, luego lo borraba todo y tenía que volver a ponerlas" (E5), "Es cierto lo que dicen mis compañeros" (E6), "El profe que nos da clases siempre pone el formulario en una hoja bond a un costado o a veces las pone a la derecha de un color diferente con el que resuelve el ejercicio, pero deja un espacio para que no se revuelvan con los procedimientos de derivación" (E7), "Pues yo no le entiendo del todo bien con todo y que el maestro pone el formulario en la hoja bond o nos deja sacar el formulario" (E8), "el profe nos dio unas copias en blanco y negro y nos va diciendo cuál ocupar. Las fórmulas están numeradas" (E9).

Según lo expuesto por los alumnos, los profesores, cuando comienzan a ver el tema de derivación, hacen uso de un formulario en hoja bond. Asimismo, se presenta un dominio del uso del pizarrón, aunque se menciona que un maestro no hace un uso adecuado de él. En cuanto a los recursos didácticos que se tienen, algunos docentes buscan la manera de hacer claro cada procedimiento mediante el uso de plumones de diferente color. En el caso de las fórmulas, la función de los colores es para diferenciarlas o en su caso para ponerles el nombre para su fácil identificación. También, algunos alumnos comentaron que un profesor les dio unas copias en donde se encuentran las fórmulas de derivación, esto con el fin de tenerlas a la mano.

En la última sentencia: *díganme de qué manera el profesor presentó los ejemplos en el pizarrón, cómo utilizó el pizarrón, los plumones o en su caso si incluyó material didáctico y cómo lo hizo*, se rescata información cualitativa muy importante, ya que podemos ver cómo se están llevando a cabo los procesos de derivación en las clases de cálculo, como lo perciben los alumnos, para saber qué está ocurriendo durante su enseñanza o qué es lo que dificulta el aprendizaje significativo.

Los alumnos respondieron a esta pregunta diciendo lo siguiente: “El profe siempre usa dos colores o más para hacer anotaciones y que no nos confundamos. El pizarrón lo parte en dos, de un lado el ejercicio, del otro pone los conocimientos de otros semestres que debemos de saber para que no nos confundamos” (E1), “A pesar que el profe escribe feo, sí le entendemos, pero considero que falta algo para que todo sea más claro. Él usa todos los plumones para hacer claro los procesos” (E2), “Nuestro maestro siempre busca la manera de hacer sus clases claras y busca los medios para que le entendamos. A mí me gusta cómo enseña y si tengo dudas le pregunto. El maestro sabe enseñar. Siempre usa el formulario en hoja bond y de repente luego lleva su laptop y usa un programa para resolver los ejercicios. Cuando nos explica de esa manera los compañeros que no le entienden terminan entendiendo. A veces nos ayudamos y siempre nos dice que llevemos nuestros apuntes en orden. El pizarrón lo parte en dos” (E3), “El profe nos enreda porque luego llena el pizarrón y cuando no tiene el espacio empieza a escribir en los lugares que dejó vacío. Siempre usa un color” (E4), “Por lo general usa el negro y, sí, llena mucho el pizarrón” (E5), “Sí, y cuando ya no pinta, agarra el verde o el azul” (E6), “El profe usa dos colores. Él también divide el pizarrón en dos partes” (E7), “El profe explica paso a paso, pero no le entiendo a todo, las fórmulas son muy extrañas cuando las vez por primera vez” (E8), “A veces el maestro trae su proyector y presenta ejemplos en diapositivas, pero siempre las letras están en negro” (E9), “El profe usa todo el pizarrón, pero va paso a paso para que no nos confundamos, pero usa un solo color” (E10), “Sí, es un solo color” (E11), “Usa el negro y el azul y de repente cuando hay una aclaración mete el rojo o el verde” (E12).

Los comentarios hechos por los alumnos indican que existe un intento de usar recursos didácticos al incluir hojas bond, plumones de varios colores y equipo de cómputo con *software* especializado para la enseñanza de las matemáticas. De la misma manera, algunos docentes muestran que cuando enseñan matemáticas hacen un adecuado uso del pizarrón y emplean colores para resaltar algunos pasos, aclaraciones e inclusive la clasificación de las fórmulas de derivación. Entonces, llevado a cabo este análisis, conviene hacer la pregunta: ¿Qué falta por hacer para que los alumnos que tienen un rendimiento escolar medio o bajo puedan asimilar los procesos de derivación iniciales?.

Discusión

Los libros examinados, en su mayoría, presentan una metodología uniforme al introducir las explicaciones y aplicar las fórmulas básicas de funciones algebraicas. Algunos libros de cálculo notables, como los de Ayres & Mendelson (1994, 2013), mantienen la misma metodología al presentar los temas, a pesar de las ediciones posteriores.

En el caso de los libros de texto escolares, se incorporan actividades para que los alumnos las resuelvan en clase y de manera colaborativa (Collins, 2022; Trucios, 2001). Dado que estos libros están dirigidos a un público específico, es decir, los estudiantes, los autores incluyen estrategias pedagógicas al presentar los temas que generalmente forman parte de los programas de las asignaturas impartidas en las escuelas. Estos programas están regidos por las respectivas autoridades educativas en los diferentes países, siendo en México responsabilidad de la Secretaría de Educación Pública (SEP).

A diferencia de los libros mencionados anteriormente, en Stewart *et al.* (2020) se utilizan tintas de diferentes colores con la intención de hacer más accesibles los contenidos a los lectores. Sin embargo, las secciones de iniciación a la derivación e integración de funciones elementales no hacen uso de más de una tinta. Este patrón se repite en ediciones posteriores del mismo autor.

Este ejemplo ilustra claramente cómo el DME permea en la edición de los libros de cálculo utilizados tanto en la educación superior como en la educación media superior. Desafortunadamente, el uso de tintas adicionales e ilustraciones a color aumentan los costos de impresión, promoviendo el DME.

Los trabajos de investigación de Bedoya-Rodríguez (2023), Jara *et al.* (2024), Rico (2024), Cruz & Herrera (2024) y Barradas (2021) reflejan un movimiento común hacia la innovación educativa, sustentado en la integración de herramientas digitales, enfoques teóricos sólidos y estrategias didácticas. Estos recursos buscan motivar a los estudiantes mediante actividades lúdicas, modelación de problemas contextualizados, trabajo colaborativo y el uso de tecnologías emergentes. Dichas estrategias también apuntan a fortalecer el rol del docente como facilitador, impulsando su formación continua y la creación de materiales didácticos innovadores. No obstante, a pesar de que estos trabajos de investigación presentan propuestas interesantes, no analizan los procedimientos fundamentales que intervienen en la derivación e integración, como la ley de los signos, el álgebra y la aritmética que interviene, así como el uso adecuado de los formularios.

En la entrevista que se llevó a cabo utilizando el grupo focal, con los alumnos de cuarto semestre que están cursando la asignatura de cálculo integral, la información recabada fue transcrita y suministrada a MAXQDA, donde se detectaron las palabras con mayor frecuencia. La Figura 2 muestra el histograma obtenido al utilizar la herramienta *MAXDictio>Frecuencia de palabras>Lematizar palabras*. Posteriormente, la información fue exportada a Microsoft Excel. Asimismo, las palabras carentes de significado, tales como los artículos y pronombres, fueron excluidos.

La palabra *pizarrón* se mencionó 13 veces, ya que es el recurso didáctico más empleado en la asignatura de cálculo. La palabra *bond* se mencionó cuatro veces debido a que algunos alumnos no dijeron la palabra, aunque confirmaron el uso de este recurso para presentar las fórmulas de derivación. Así mismo, las palabras *fórmulas* y *formulario* se encuentran dentro de las palabras con mayor frecuencia, pues la investigación se ha enfocado al estudio de la aplicación del formulario y los procedimientos iniciales en la enseñanza del cálculo diferencial.

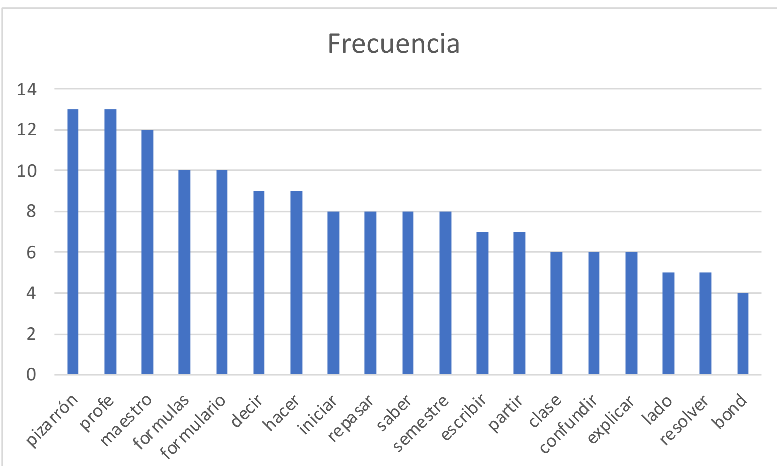

Figura 2. Palabras que se utilizaron con mayor frecuencia en la entrevista focal.
Fuente: Elaboración propia.

La palabra *iniciar* y *repasar* fueron referidas por los alumnos porque, según argumentaron, los docentes sí se han preocupado por dar repasos, suplir carencias cuando inicia el semestre o en su caso cuando van a comenzar un tema, e incluso en el desarrollo de algún ejercicio. La palabra *partir* (*dividir*) hace referencia a la actividad didáctica del profesor en el manejo del pizarrón con la idea de hacer claros los procedimientos en su manejo. Esto viene sustentado en los argumentos dichos en las sentencias 2, 3 y 4.

Además, en el análisis cualitativo, las subcategorías Conocimientos previos/ Activación en el momento y Conocimientos previos/Recuperación de cursos pasados tienen una frecuencia de 2 y 7, respectivamente. Estas subcategorías se presentan en los diálogos reiterados de los alumnos al referirse que los profesores buscan reactivar conocimientos previos (Figura 3). Este análisis concuerda con la palabra *repasar* (Figura 2).

En la Figura 3, las subcategorías del análisis cualitativo Aprendizaje significativo/Aprendizaje significativo del alumno y Aprendizaje significativo/Activación significativa se tiene una frecuencia de 3 y 5 en la activación de frecuencias. Aquí es importante mencionar que los alumnos de alto desempeño son los que lograron la activación significativa, como puede observarse en los resultados presentados en la Figura 1. La subcategoría Activación significativa se refiere al discurso de los alumnos que no lo lograron, por lo que se tiene una frecuencia baja, lo que concuerda con la palabra *confundir* en la Figura 2 y los resultados obtenidos por los alumnos con un desempeño escolar medio.

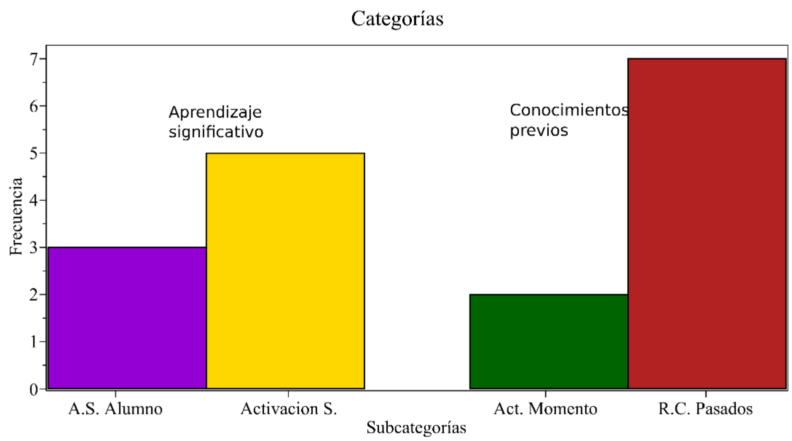

Figura 3. Histograma de las categorías Aprendizaje significativo y Conocimientos previos.
Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4, la subcategoría DME/desconexión de los significados presenta una frecuencia de 20, debido a que en todo momento los alumnos han expresado no comprender los procedimientos de derivación. Aunado a esto, los repasos de temas previos no son efectivos porque los alumnos continúan sin comprender los contenidos académicos anteriores ni los recientes (Figura 1), principalmente en los alumnos de bajo y medio desempeño.

En la figura 1, las categorías DME/Centrado en el objeto y DME/Utilitario tienen una frecuencia de 15 y 16, respectivamente, ya que estas se encuentran íntimamente relacionadas en los instantes que los repasos y la enseñanza de la derivación se enfoca únicamente en su ejemplificación, solución y empleo del formulario, careciendo de marcos de referencia (Soto & Cantoral, 2014; Soto *et al.*, 2012).

A pesar de que algunos docentes tienen la intención de activar conocimientos previos, el DME está presente. Por un lado, en a pesar de que algunos docentes tienen la intención de activar conocimientos previos, el DME sigue presente. Esto se observa en la forma en que el docente aborda el repaso: lo plantea con un carácter utilitario, centrado casi exclusivamente en resolver ejercicios sin construir significados, y orientado al objeto, ya que la finalidad se reduce a dar solución a los ejercicios del repaso. Esto, a su vez, nos remite al carácter hegemónico, otra característica del DME (Astudillo *et al.*, 2023; Soto & Cantoral, 2014; Soto *et al.*, 2012), por el uso exclusivo del procedimiento mecánico de cómo se debe resolver los ejercicios según la literatura que aparece en los libros, traduciéndose en una desconexión de aprendizajes significativos (Díaz & Hernández, 2010), ya que el alumno no logra reactivar conocimientos previos, o bien, aprenderlos durante el repaso. Por otro lado, la calendarización de los temas programados para el semestre incide en el tiempo que se contabiliza para las actividades, los cuales en muchos casos no es suficiente.

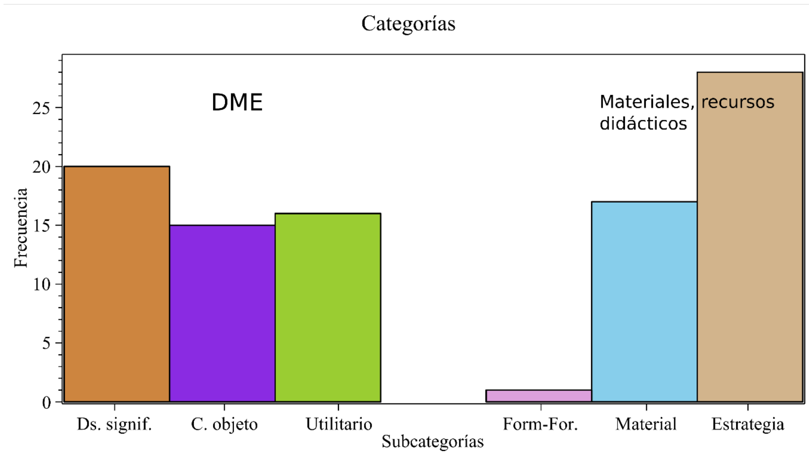

Figura 4. Histograma de las categorías DME y Materiales-Recursos didácticos.
Fuente: Elaboración propia.

Respondiendo la pregunta planteada al final de la sección anterior, identificamos que la falta de capacitación en matemática educativa y las habilidades docentes es un factor influyente en las aulas. El manejo inadecuado del pizarrón por parte de algunos docentes afecta la organización de los procedimientos o la incorporación de notas aclaratorias sobre conocimientos previos relacionados con los pasos en la resolución de ejercicios. Este problema se agrava con la falta de técnicas didácticas en el uso de plumones, ya que algunos docentes seleccionan colores inapropiados o los utilizan de manera incorrecta. Esta situación, como se mencionó anteriormente, contribuye al DME y se refleja en la presentación unicolor en los libros de matemáticas.

La Figura 4 muestra la dedicación de los maestros a la enseñanza de acuerdo con la categoría Materiales-Recursos didácticos. El uso de materiales didácticos tiene una frecuencia relativamente alta de 17 debido a la presentación de los profesores sobre el uso de *software* didáctico, el cañón electrónico, las hojas bond y la variada utilización de plumones de diferentes colores, a pesar de no ser empleados de manera eficaz. Los resultados del examen diagnóstico en la Figura 1 y el análisis cualitativo indican que las estrategias empleadas, los recursos didácticos y el formulario utilizados están fuertemente influenciados por el DME. Tomando en cuenta los resultados de la Figura 1, los comentarios positivos de los alumnos y el rubro *estrategias didácticas empleadas* con la frecuencia más alta en la Figura 4, se concluye que no fueron las adecuadas.

En la Figura 4, el formulario tiene la frecuencia más baja de todo el análisis a pesar de que los alumnos han expresado que es ampliamente usado por los docentes. Si bien el formulario también es un recurso didáctico para la enseñanza de los procesos de derivación, la parte interesante del análisis es su baja frecuencia (2 menciones). Esto se debe a la manera ineficaz de su diseño y presentación dentro del salón, independientemente del recurso didáctico utilizado. Varios alumnos dijeron que los profesores lo han escrito (o proyectado) en una sola tinta, o bien, que utilizan colores para presentar la clasificación de las fórmulas (funciones algebraicas, trascendentes, trigonométricas, hiperbólicas e inversas); no obstante, el DME perdura.

Es oportuno decir que, de acuerdo con las estadísticas de aprobación en la institución, la asignatura de matemática aplicada (cálculo integral) es la asignatura con mayor índice de reprobación puesto que se emplean contenidos de todos los anteriores de matemáticas. De modo que, si un alumno no aprendió a derivar ni entendió los conceptos del significado de lo que es una derivada, difícilmente tendrá éxito en el curso de cálculo integral, convirtiéndose -desde el inicio del semestre- en un candidato potencial para formar parte de la matrícula de alumnos reprobados.

En asignaturas de matemáticas, el uso de diferentes colores puede ser de gran ayuda para resaltar los pasos que son importantes, principalmente cuando se tienen alumnos con alto rezago académico; sin embargo, para atender los diferentes canales de aprendizaje (Alonso *et al.*, 1994; Castro & Guzmán, 2005; Gallego *et al.*, 2022), es posible entonces replantear, por un lado, la capacitación docente en matemática educativa y, por otro lado, el uso adecuado de los colores en los procedimientos de estas asignaturas.

Diseño de la propuesta didáctica y resultados de su aplicación

En función de los análisis expuestos en este artículo, procederemos en primer lugar a resignificar el DME en relación con la ley de los signos. Este enfoque busca abordar los conflictos persistentes que muchos estudiantes enfrentan al tratar de comprender verdaderamente lo que ocurre al aplicar estas leyes en operaciones de multiplicación y división. En segundo lugar, se llevará a cabo una resignificación del DME en el manejo del formulario de cálculo diferencial e integral, dado que el funcionamiento de ambos es prácticamente idéntico. Por último, se presentan ejemplos demostrativos de aplicación: una vez comprendido el uso de las fórmulas, se pueden llevar a cabo procesos rápidos para resolver ejercicios de mayor dificultad en su solución.

Resignificación de la ley de los signos. Generalmente se acostumbra a enseñarla diciendo que signos iguales dan positivo y signos diferentes dan negativo. A la luz del DME, la ley de los signos se enseña diciendo a los alumnos: "(+) por (+) da (+), (+) por (−) da (−), (−) por (+) da (−), y (−) por (−) da (+)".

En la Figura 5 presentamos otra manera para escribir la ley de los signos. Véase que al multiplicar por el signo más (+), los signos en nuestro factor permanecen inalterados, mientras que al multiplicar por el signo menos (−) los signos se invierten. Este análisis muestra la carencia de significado cuando en las clases tradicionales de álgebra se pide a los alumnos aprenderlo de memoria e, incluso, algunos maestros dictan esta ley y después la escriben en el pizarrón.

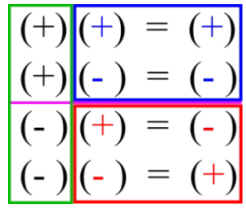

Figura 5. Resignificación de la enseñanza de la ley de los signos.
Fuente: Elaboración propia.

Resignificación de los formularios de cálculo. En la Figura 6 se presenta el formulario de derivación de funciones elementales con sus respectivos nombres. Nótese que la flecha de la izquierda muestra el procedimiento de cómo se enseña a derivar, desde la regla de la derivada de una constante, hasta la derivada de un cociente.

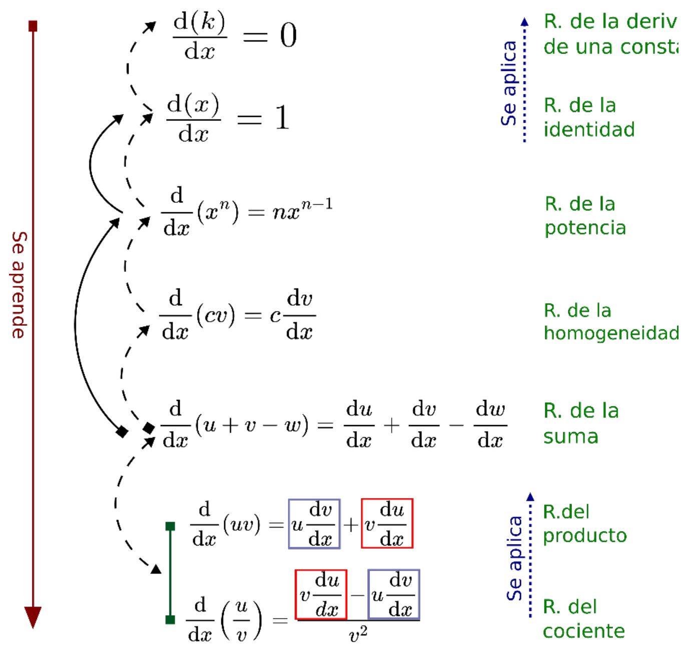

Figura 6. Aprendizaje y uso del formulario de cálculo diferencial.
Fuente: Elaboración propia.

La problemática radica en que el DME de los libros y de las clases de cálculo diferencial no aclaran de manera explícita y gráfica cómo se deberían aprender las formulas y cómo deberían aplicarse. En la aplicación, es necesario comenzar con las fórmulas para la regla del producto y del cociente, para luego aplicar la regla de la suma. Como se observa en la Figura 6, el aprendizaje sugiere ir de la regla de la derivada de una constante hasta la regla del cociente, según la flecha recta de la izquierda. En el proceso de aplicación, el funcionamiento es al revés. Por ejemplo, después de aplicar la regla de la suma, las flechas curvas discontinuas indican cuáles fórmulas deben aplicarse a continuación hasta llegar a la regla de la derivada de una constante. Sin embargo, es posible que la aplicación de alguna fórmula pueda omitirse según la flecha curva continua. En otras palabras, después de aplicar la regla de la suma, puede ser necesario aplicar la regla de potencia y la fórmula de la regla de la identidad, todo dependiendo de los términos presentes en el ejercicio a derivar.

En la Figura 7, se puede ver que en el formulario de cálculo integral los procedimientos de aprendizaje y aplicación son los mismos que en los de cálculo integral; no obstante, existe una variante en la regla de la potencia. En esta figura se muestra una conexión de la regla de la potencia con una fórmula que se ha propuesto llamarle "excepción de la regla de la potencia" para el caso único cuando el exponente es igual a -1. Cuando tenemos este exponente, se genera una división entre 0 al aplicar la regla de potencia.

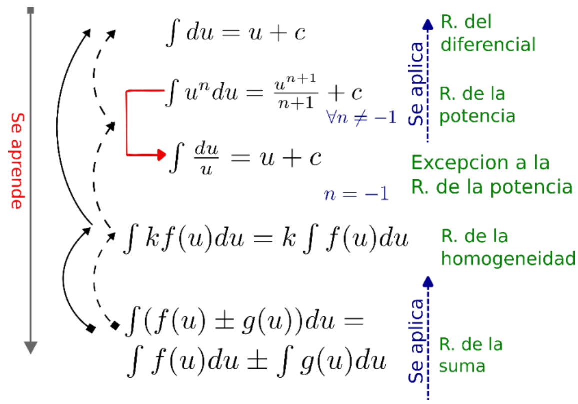

Figura 7. Aprendizaje y uso del formulario de cálculo integral.
Fuente: Elaboración propia.

Casos de estudio

Ejemplo 1. Aplicación de la ley de los signos.

Realizar la operación $(3x - 2y)(a - b + 5c)$.

Solución. De acuerdo con la Figura 5, al multiplicar por $(+3x)$, los signos para el segundo factor permanecerán iguales, pero al multiplicar por $(-2y)$, los signos se invertirán. Por lo tanto, la respuesta es:

$$(3xa - 3xb + 15xc - 2ya + 2yb - 10yc).$$

Ejemplo 2. Derivar $y = 10x^5 + x^4 + 5x^3 - 8x$.

Solución. En primer lugar, debemos aplicar el operador de derivación, obteniendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(10x^5 + x^4 + 5x^3 - 8x).$$

Antes de comenzar a derivar este tipo de ejercicios, se debió haber explicado a los alumnos lo que significa la regla de la suma, que consiste en separar términos.

$$\frac{d}{dx}(f(u) \pm g(u)) = \frac{d}{dx}(f(u)) \pm \frac{d}{dx}(g(u))$$

Incluso, esta fórmula puede estar escrita con diferentes colores/negritas en el formulario para que siempre los alumnos tengan presente el proceso de aplicación. Aplicando la regla de la suma se tiene la suma de cuatro derivadas porque son cuatro términos.

Nótese que los coeficientes se han cambiado de color/negrita porque primero se hará uso de la regla de la homogeneidad, extrayendo constantes del signo de derivación. Los primeros tres términos con derivadas harán uso de la regla de la potencia; en la última derivada del último término se aplicará la regla de la identidad (ver las flechas curvas de aplicación de las fórmulas en la Figura 5). Por lo tanto, aplicando en primer lugar la regla de la homogeneidad se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(10x^5)+\frac{d}{dx}(x^4)+\frac{d}{dx}(5x^3)-\frac{d}{dx}(8x),$$

$$\frac{dy}{dx}=10\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(x^4)+5\frac{d}{dx}(x^3)-8\frac{d}{dx}(x),$$

$$\frac{dy}{dx}=10(5x^{5-1})+4x^{4-1}+5(3x^{3-1})-8(1).$$

Véase que, al aplicar la regla de la homogeneidad, las constantes se han puesto de otro color/negrita para que los alumnos identifiquen más fácilmente los pasos a seguir. Simplificando, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=50x^4+4x^3+15x^2-8.$$

Ejemplo 3. Derivar $y=\frac{3x^3+7x^2-1}{9x^2-5x}$.

Solución. Aplicando el signo de derivación a este cociente a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3+7x-1}{9x^2-5x}\right).$$

haciendo $u=3x^3+7x-1$, $v=9x^2-5x$. La derivada de un cociente es un ejercicio que, con frecuencia, es complicado para los alumnos, al igual que la regla del producto; sin embargo, estas dos últimas fórmulas funcionan de una manera muy parecida porque ambas tienen los términos $u\frac{dv}{dx}$ y $v\frac{du}{dx}$. En el formulario de derivadas se puede ver que estos dos términos se encuentran encerrados en recuadros para destacar su similitud de funcionamiento. Este tipo de ejercicios se aplica con los alumnos cuando ya aprendieron a usar la regla de la suma. Al resolver este ejercicio, primero se debe aplicar la regla del cociente y después la regla de la suma, de acuerdo con las flechas curvas.

Nosotros podemos plantear el siguiente procedimiento alternativo para solucionarlo. Primero se derivarán u y v (con regla de la suma, flecha curva dirección hacia abajo) y después las sustituiremos en la regla del cociente. Si el ejercicio es un producto, entonces se sustituye en la regla de producto. Segundo, para facilitar los procedimientos, derivaremos de manera inmediata, multiplicando los exponentes de cada término por los coeficientes de ese término y restando 1 a cada exponente. En algunos casos se debe tener presente la regla de la identidad y la regla de la derivada de una constante, de este modo tenemos:

$$u=3x^3+7x-1, \qquad v=9x^2-5x,$$

$$\frac{du}{dx}=9x^2+7, \qquad \frac{dv}{dx}=18x-5.$$

Sustituyendo en la fórmula del cociente se obtiene.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(9x^2-5x)(9x^2+7)-(3x^3+7x-1)(18x-5)}{(9x^2-5x)^2}.$$

De aquí queda simplificar los factores y recordar que un signo menos $(-)$ genera un cambio de signos, teniendo en cuenta la Figura 5. En general, una vez que los alumnos aprendieron la regla de suma, se les puede enseñar a derivar de manera rápida, aunque algunos jóvenes intuyen este proceso sin necesidad de argumentarlos.

Ejemplo 4. Integrar $dy=(8x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x})$.

Solución. Los alumnos deben tener claro que en la integración fundamental las expresiones que deben integrarse deben ser productos, es decir, un coeficiente multiplicado por un término algebraico (*literal*, variable de integración) y el diferencial. Reescribiendo y aplicando el signo de integración, tenemos:

$$\int dy=\int (8x^3+x^{-2}+3x^{-1})dx.$$

Véase que los coeficientes se han puesto de otro color/negrita, pues se aplicará aquí la regla de la homogeneidad. Aplicando la regla de la suma y la regla de la homogeneidad, tenemos:

$$\int dy=\int 8x^3dx+\int x^{-2}dx+\int 3x^{-1}dx,$$

$$\int dy=8\int x^3dx+\int x^{-2}dx+3\int x^{-1}dx.$$

Del lado izquierdo se aplicará la regla del diferencial, del lado derecho la regla de la potencia; sin embargo, se tiene que en la última integral el exponente es -1. A esto nos referimos con la conexión que se presenta con una flecha entre la regla de la potencia y la excepción de la regla de la potencia. Simplificando, se tiene:

$$y=4x^2-\frac{1}{x}+3\ln(x)+c.$$

Es posible realizar una integración inmediata omitiendo pasos cuando los jóvenes han logrado recordar en su totalidad las leyes de los signos, operación con fracciones y la ley de los exponentes tal como se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Integrar de manera rápida sin mostrar el procedimiento de integración según las fórmulas $\int dy=\int (x^{1/2}+x^2+3x^{4/7}+x^{-5/2})dx$.

Solución. En este caso se debe tener en cuenta la regla de la potencia, ya que es la fórmula clave de integración. En este caso, todos los exponentes son diferentes a -1, por lo tanto, se puede aplicar sin problema de dividir entre 0. Asimismo, se debe tener presente la manera alternativa de expresar una raíz como un exponente fraccionario. Procediendo a sumar $+1$ de acuerdo con la fórmula de la regla de potencia tenemos:

$$y=\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^{11/7}}{11/7}+\frac{x^{-3/2}}{-3/2}+c$$

Obsérvese que la integración es rápida. Los alumnos deben tener en mente la fórmula de la regla de la potencia. Sin embargo, respecto a la suma de fracciones, es fácil recordar que la unidad se da cuando el numerador y el denominador tienen el mismo número. Para hacer las operaciones mentalmente, al numerador se le suma el denominador y el nuevo número será el nuevo numerador. De esta manera, el exponente del primer término se obtiene sumando $2 + 1 = 3$, siendo 3 el nuevo numerador del exponente; es decir, el nuevo exponente para este término es $\frac{3}{2}$, el nuevo exponente del tercer término es $\frac{11}{7}$. En el cuarto término, el exponente es $\frac{-3}{2}$ debido a que la operación realizada para el numerador fue $-5 + 2 = -3$, puesto que debe tomar el signo negativo del numerador. Por último, queda simplificar los coeficientes y, para ello, los alumnos deben tener presente la regla de la herradura y que, cuando el número 1 es un coeficiente o un exponente entero, queda implícito, es decir, no se escribe. Por lo tanto, simplificando obtenemos:

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{11}x^{11/7} - \frac{2}{3x^{3/2}} + c.$$

El diseño metodológico fue aplicado a los estudiantes en una clase posterior, una vez que se obtuvieron los resultados del diagnóstico y del análisis cualitativo. Después se procedió a aplicar el retest en un tiempo de 25 minutos, con el fin de verificar los aprendizajes de los alumnos.

En la Figura 8 se presentan los resultados obtenidos por todos los alumnos. En el caso de los alumnos de medio y bajo rendimiento, ellos presentaron una mejoría muy significativa. Véase que de los alumnos de bajo desempeño solo uno no contestó de manera correcta el inciso b de la última sentencia debido a que presentaba un alto rezago académico. Al finalizar la evaluación, se aplicó una pregunta de retroalimentación para conocer la percepción del estudiantado (hombres y mujeres) sobre la estrategia didáctica y el uso del formulario: si consideraban que facilitó la comprensión y ejecución de los procedimientos de derivación e integración. La mayoría señaló que, con esta metodología, los pasos iniciales de derivación resultan más claros y fáciles de comprender.

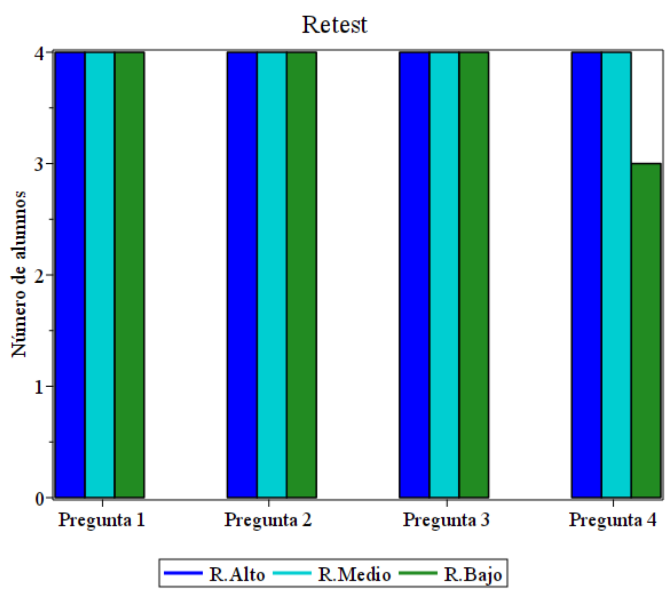

Figura 8. Resultados del retest después de aplicar el diseño didáctico en cálculo diferencial.
Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

El diseño didáctico propuesto en esta investigación se ha configurado a partir de los resultados del análisis exploratorio llevado a cabo en el grupo focal, considerando las expresiones y opiniones de los alumnos. Asimismo, este diseño también se fundamenta en la investigación bibliográfica de varios libros de texto, explorando cómo abordan la introducción de los procesos iniciales de derivación. Se aborda críticamente la impresión monocromática predominante en los libros analizados, la cual promueve el DME.

La investigación llevada a cabo en este trabajo subraya que la revisión de temas previos al curso de cálculo diferencial, o en su caso, el uso de recursos didácticos resulta insuficiente si los docentes carecen de las habilidades necesarias para enseñar cálculo diferencial y matemático en general, evidenciando una capacitación docente deficiente en matemática educativa, derivada de la falta de experiencia.

La propuesta didáctica muestra la manera en que debe ser el uso de formularios en las fases de aprendizaje y aplicación. En la fase de aprendizaje, los formularios deben usarse de la fórmula más sencilla a la fórmula que incorpora más operaciones, como la regla del cociente en el caso de las derivadas; mientras que, en la fase de aplicación, el proceso se invierte, partiendo de las ultimas fórmulas hacia aquellas que son las más elementales. Además, es necesario presentar los procedimientos de derivación/integración utilizando colores o negritas en los coeficientes, facilitando una derivación rápida y la aplicación de otras fórmulas -como la regla del producto- para agilizar los procedimientos con aprendizajes significativos.

Respecto a los procedimientos que intervienen en la integración y derivación, estos son generalmente algebraicos. El lenguaje algebraico, que se concibe como un sistema de símbolos y letras, utilizado para representar números, operaciones matemáticas y sus relaciones, adquiere una resignificación. Es decir, el álgebra es una aritmética generalizada, una simbolización de las operaciones aritméticas que se llevarán a cabo para cualquier expresión entera, fraccionaria o racional, números utilizados en los cursos de cálculo. Asimismo, la ley de los signos en los cursos de cálculo juega un papel crucial, así como en la simplificación de expresiones. En este trabajo se ha redefinido la enseñanza y uso de la ley de los signos.

Por otro lado, también se ha clarificado la manera de cómo se pueden realizar los procesos de derivación o integración una vez que se ha comprendido el uso del formulario. En esta fase los alumnos conocen las fórmulas y proceden a realizar de manera directa las operaciones aritméticas que ocurren en los exponentes y en los coeficientes. En consecuencia, los procesos de derivación e integración tienden a simplificarse, obteniendo la ventaja de reducir tiempos de cómputo y de abordar de manera efectiva la solución de ejercicios con mayor grado de dificultad.

Finalmente, los resultados obtenidos de los grupos focales con alumnos de medio y bajo desempeño, tras la implementación de la metodología didáctica, revelan que hay una notable mejoría. Los alumnos de medio desempeño contestaron correctamente el examen y aquellos con bajo rendimiento mostraron mejoras significativas. Aunque un estudiante de bajo rendimiento no alcanzó un rendimiento deseable, su progreso fue significativo. Sin embargo, se destaca que para obtener buenos resultados es deseable que los estudiantes estén dispuestos a aprender y mejorar.

Agradecimientos

A la memoria del ingeniero Nelson Gutiérrez Valdez (Q. E. P. D.), presidente local de la academia de Matemáticas en el CBTis 190 y presidente de la academia estatal de Matemáticas de la DGETI en el estado de Veracruz, por las facilidades otorgadas. A la memoria de la bibliotecaria del turno vespertino, Norma Shoup Fierro (Q. E. P. D.), con gratitud por el apoyo y las facilidades brindadas para la realización de esta investigación. A la Lic. Elia I. Flores Fuentes, jefe de servicios docentes del turno vespertino, la Lic. Sara García-Romero, jefe de tronco común, en el CBTis 190 por el valioso apoyo. A la M. E. Griselda J. Morales Alarcón y al M. en I. Roberto Ruiz Gómez por el soporte otorgado.

Conflicto de interés

Los autores declaran no tener conflicto de interés en la publicación de este artículo.

Referencias

Arellano, C. E., Marcía, S. L., & Cordero, F. (2020). Adherencia al discurso matemático escolar: el caso de la integral definida en la formación inicial docente. *UCMaule*, (59), 31-55. http://doi.org/10.29035/ucmaule.59.31

Astudillo, J., Soto, D., & Bobadilla, G. (2023). La resignificación del discurso Matemático Escolar. Una mirada al volumen desde la teoría socioepistemológica. *UCMaule*, (64), 39-65. https://doi.org/10.29035/ucmaule.64.39

Ayres, F., & Mendelson, E. (1994). *Cálculo diferencial e integral* (3a ed.). Serie Shaum México. McGraw-Hill,

Ayres, F., & Mendelson, E. (2013). *Cálculo diferencial e integral* (6ta ed.). McGraw-Hill

Baldor, A. (2019). *Algebra*. Editorial Patria.

Barradas, U. D. (2021). Recursos digitales como apoyo en la enseñanza del cálculo. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo (RIDE)*, *12*(23), e276. https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1040

Bedoya-Rodríguez, F. J. (2023). El rompecabezas: estrategia didáctica para mejorar el aprendizaje del cálculo en estudiantes de ingeniería. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (53), 162–180. https://doi.org/10.17227/ted.num53-14357

Cabrera, L. M., & Romano, R. (2024). La problematización de la matemática escolar y el diseño de situaciones de aprendizaje en un escenario de desarrollo profesional docente. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, *15*, e1938. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.1938

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9-28. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

Cárdenas-González, M., & Álvarez-Buylla, E. R. (2020). The COVID-19 pandemic and paradigm change in global scientific research. *Medicc Review*, *22*(2), 14-18. https://doi.org/10.37757/MR2020.V22.N2.4

Castro, S., & Guzmán, B. (2005). Los estilos de aprendizaje en la enseñanza y el aprendizaje: una propuesta para su implementación. *Revista de Investigación*, (58), 83-102. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=376140372005

Collins, J. (2022). *Cálculo integral*. Editorial ALEC.

Cruz, S. L., & Herrera, C. J. (2024). Desafíos en la enseñanza del cálculo en contextos universitarios en un enfoque por competencias. *Plumilla Educativa*, *33*(1), 1–27. https://doi.org/10.30554/pe.33.1.5099.2024

Díaz, F., & Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. McGraw-Hill Interamericana.

Gallego, D. J., Alonso, C., & Vieira, D. M. (2022). Estilos de aprendizaje estilos de enseñanza. Propuestas pedagógicas para la transformación de la educación. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, *15*(Especial), 1-4. https://doi.org/10.55777/rea.v15iEspecial.5309

Hamui-Sutton, A., & Varela-Ruiz, M. (2013). La técnica de grupos focales. *Investigación en Educación Médica*, *2*(5), 55-60. http://riem.facmed.unam.mx/index.php/riem/article/view/451

Jara, J. A., Tocto, J. S., & Vivanco, J. V. (2024). Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. *Estudios y Perspectivas. Revista Científica y Académica*, *4*(2), 2360–2379. https://doi.org/10.61384/r.c.a..v4i2.374

Mateus-Nieves, E. (2017). Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes [Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Archivo PDF en línea. https://www.ugr.es/~fqm126/tesis/Tesis_Mateus.pdf

Mendoza, E., & Zúñiga, M. (2017). Factores intra y extra escolares asociados al rezago educativo en comunidades vulnerables", *Alteridad. Revista de Educación*, *12*(1), 79-91. http://dx.doi.org/10.17163/alt.v12n1.2017.07

Morales, N. (2015). *Investigación exploratoria: tipos, metodología y ejemplos*. https://www.lifeder.com/investigacion-exploratoria

Otzen, T., & Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *International Journal of Morphology*, *35*(1), 227-232. http://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022017000100037

Rico, A. (2024). El aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial: Perspectivas desde las teorías APOE y ontosemiótica. *Ciencia Latina. Revista Científica Multidisciplinar*, *8*(1), 5949–5970. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1.9939

Rivas, P. (2005). La Educación Matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Educere*, *9*(29), 165-170. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35602904

Rodas, F. D., & Pacheco, V. G. (2020). Grupos focales: marco de referencia para su implementación. *INNOVA Research Journal*, *5*(3), 182-195. doi: https://doi.org/10.33890/innova.v5.n3.2020.1401

Sandoval-Hernández, M. A., Hernández-Méndez, S., Torreblanca-Bouchan, S. E., & Díaz-Arango, G. U. (2021a). Actualización de contenidos en el campo disciplinar de matemáticas del componente propedéutico del bachillerato tecnológico: el caso de las funciones especiales. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *12*(23), e278. https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1044

Sandoval-Hernández, M. A., Vázquez-Leal, H., Huerta-Chua, J., Filobello-Nino, U. A., & Mayorga-Cruz, D. (2022). La didáctica del cálculo integral: el caso de los procedimientos de integración. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *13*(25). https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1245

Sandoval-Hernández, M., Vazquez-Leal, H., Filobello-Nino, U., De-Leo-Baquero, E., Bielma-Perez, A. C., Vichi-Mendoza, J. C., Alvarez-Gasca, O., Contreras-Hernández, A. D., Bagatella-Flores, N., Palma-Grayeb, B. E., Sánchez-Orea, J., & Cuellar-Hernández, L. (2021b). The quadratic equation and its numerical roots. *International Journal of Engineering Research & Technology*, *10*(6), 301-305. https://www.ijert.org/research/the-quadratic-equation-and-its-numerical-roots-IJERTV10IS060100.pdf

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Soto, D., Gómez, K., Silva, H., & Cordero, F. (2012). Exclusión, cotidiano e identidad: una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En R. Flores (ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa* (pp. 1041-1048). Colegio Mexicano de Matemática Educativa-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf

Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2020). *Calculus: early transcendentals* (9a ed.). Cengage Learning.

Trucíos, S. F. (2001). *Cálculo integral*. Mc Graw Hill.

Viera, T. (2003). El aprendizaje verbal significativo de Ausubel. Algunas consideraciones desde el enfoque histórico cultural. *Universidades*, (26), 37-43. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37302605

Zamora, S., Segarra, S., González, S., & Vitonera, M. (2023). El aprendizaje significativo en la educación actual: una reflexión desde la perspectiva crítica. *Revista Educare*, *27*(1), 1-13. https://doi.org/10.46498/reduipb.v27i1.1896

Anexo 1

Examen diagnóstico de cálculo diferencial

Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicio No. 190

Nombre del alumno:__________________________________ Fecha:_________

Reactivos:______

Instrucciones: Resuelve las siguientes derivadas indicando todo el procedimiento de derivación. Apóyate en el formulario que te presenta el instructor.

1. Deriva cada una de las funciones indicadas en los incisos.

$\frac{d}{dx}(9\pi)$ B) $\frac{d}{dx}(2\sqrt{5})$

2. Deriva cada una de las funciones indicadas en los incisos.

$\frac{d}{dx}(6x)$ B) $\frac{d(w)}{dw}$

3. Deriva cada una de las funciones indicadas en los incisos.

$\frac{d(t^6)}{dt}$ B) $\frac{d}{dt}(24t^3)$

4. Deriva cada una de las funciones indicadas en los incisos.

$\frac{d}{ds}(11s^5 + 7s^3 + 5s^2 - 4s + \frac{4}{3})$ B) $\frac{d}{ds}(11s^7 + s^5 + 5s^2 - s)$

Anexo 2

Guion para la entrevista focal

Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicio No. 190

Palabras de bienvenida, motivos, indicaciones, etc.

Pregunta 1: ¿qué ejercicio del examen les pareció más complicado y explica por qué?

Pregunta 2: Cuando comenzaron a derivar, ¿el maestro incluyó el formulario con las fórmulas de derivación? Denme una descripción de cómo era el formulario de derivación que el profesor ocupa.

Pregunta 3: ¿El maestro les dio algún repaso de álgebra o algún tema relacionado con cálculo diferencial?

Pregunta 4: Díganme de qué manera el profesor presentó los ejemplos en el pizarrón, cómo usar el pizarrón, los plumones o en su caso si incluye material didáctico y cómo lo hizo.

Palabras de agradecimiento.