

Determinación del umbral de pobreza en Guanajuato: un enfoque innovador mediante la ley de Engel y el criterio de la segunda derivada

Determination of the poverty threshold in Guanajuato: an innovative approach using Engel's law and the second derivative criterion

Juan Manuel Rodríguez García¹, Sergio Ernesto Medina Cuéllar², Marco Antonio Sánchez Jiménez^{3*}

¹Departamento de Gestión y Dirección de Empresas, División de Ciencias Económico-Administrativas, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato. ORCID: 0000-0001-5046-0038.

²Departamento de Arte y Empresa / Gestión Empresarial, División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato. Salamanca, Guanajuato, México. CP. 36787. Tel. 464 6479940. ORCID: 0000-0003-1883-935X.

³Departamento de Ingeniería en Gestión Empresarial, TecNM/Instituto Tecnológico Superior de Irapuato. CP. 36821 Irapuato, Guanajuato, México. Tel. 462 606 7900.

marco.sj@irapuato.tecnm.mx, ORCID: 0000-0002-9571-2734

*Autor de correspondencia

Resumen

Palabras clave:

Umbral de pobreza;
nivel de ingreso;
gasto en alimentos;
ley de Engel; segunda
derivada.

El objetivo es determinar el umbral de pobreza en el estado de Guanajuato, utilizando la ley de Engel, que relaciona el ingreso familiar con el gasto en alimentos (GA) como variables. Ese ingreso representa lo que se debe ganar para dejar de ser pobres. El método empleado se basa en la ley de Engel para determinar la función cúbica con las variables de ingresos y el GA. Para resolver la función cúbica se utilizó el criterio de la segunda derivada y el punto de inflexión. De esta manera, se realizó una aportación al método tradicional, obteniendo un ingreso mensual de \$11 889.83 pesos mexicanos. Además, al calcular el punto de inflexión, se determinó el gasto mensual en alimentos, que fue de \$6565.40 pesos mexicanos. Este hallazgo permitió observar la correlación entre el ingreso y el GA con la función cúbica, adquiriendo el valor del GA, el cual tradicionalmente no se obtenía.

Abstract

Keywords: Poverty threshold; income level; food expenditure; Engel's law; second derivative.

The objective is to determine the poverty threshold in the state of Guanajuato using Engel's law, which relates household income and food expenditure (FE) as variables. This income represents what families need to earn in order to escape poverty. The method employed is based on Engel's law to determine the cubic function with income and FE as variables. To solve the cubic function, the second derivative criterion and the inflection point were used. This approach contributed to the traditional method, yielding a monthly income of \$11 889.83 Mexican pesos. Additionally, by calculating the inflection point, the monthly food expenditure was determined to be \$6565.40 Mexican pesos. This finding made it possible to observe the correlation between income and FE using the cubic function, obtaining the FE value which was traditionally not calculated.

Recibido: 11 de marzo de 2025

Aceptado: 25 de septiembre de 2025

Publicado: 18 de febrero de 2026

Cómo citar: Rodríguez, J. M.; Medina, S. E.; & Sánchez, M. A. (2026). Determinación del umbral de pobreza en Guanajuato: un enfoque innovador mediante la ley de Engel y el criterio de la segunda derivada. *Acta Universitaria*, 36, e4564. doi: <https://doi.org/10.15174/au.2026.4564>

Introducción

El aumento de las necesidades en los hogares se debe, en gran parte, a la falta de una adecuada administración interna y al desconocimiento de los apoyos disponibles, que a menudo no se solicitan por falta de información o de interés. La determinación del índice de pobreza en los hogares y sus factores determinantes no siempre se realiza de manera analítica o basada en procedimientos claros; generalmente, se enfoca en el ingreso, sin considerar elementos que pueden provocar gastos significativos fuera de las necesidades básicas. Por ello, es necesario un análisis que no solo considere la utilidad, sino también la relación del ingreso con las necesidades básicas -como los gastos alimentarios-, para identificar factores de pobreza e implementar estrategias de toma de decisiones. Tradicionalmente, la pobreza se ha medido de forma unidimensional, utilizando exclusivamente el nivel de ingreso (renta) como indicador del bienestar económico. Aunque esta perspectiva ha sido útil y ampliamente aceptada, las medidas unidimensionales de pobreza han sido sometidas a exhaustivas revisiones (Cortés *et al.*, 2003).

El propósito de esta investigación es establecer el umbral de pobreza para el estado de Guanajuato (Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI], 2023), utilizando una metodología libre de prejuicios y opiniones preconcebidas, definiendo de antemano las variables y valores necesarios para un análisis preciso del fenómeno. Tomando como indicador el cambio porcentual en el consumo de alimentos ante variaciones porcentuales en el ingreso, se busca identificar el nivel de ingreso que define la línea de pobreza en Guanajuato, a partir del cual las familias comienzan a satisfacer sus necesidades alimentarias básicas.

La medición de la pobreza es un tema de gran interés para los grupos políticos y los gobiernos, ya que ellos necesitan información precisa y confiable para formular políticas públicas. Sin embargo, los avances en el desarrollo de metodologías para identificar y reducir las condiciones de desigualdad en la que vive una gran parte de la población han sido insuficientes (Alkire & Foster, 2008; Cortés *et al.*, 2003). Si bien existen diferentes metodologías y sus diversas métricas que permiten estudiar la pobreza, existe muy poco consenso entre científicos sociales, organismos internacionales y gobiernos sobre los métodos de medición a utilizar (Alkire & Santos, 2011; Cortés *et al.*, 2003).

En el ámbito de la economía del bienestar, una herramienta importante para analizar el gasto familiar son las curvas de Engel -desarrolladas en el siglo XIX por el autor del mismo nombre-, las cuales estudian la distribución del presupuesto familiar. De estos trabajos surgió la ley de Engel, que establece como indicador del bienestar de las familias la proporción del ingreso destinada al gasto en alimentos (Engel, 1857; Engel, 2021). Esto sugiere que los hogares que destinan una menor proporción de su ingreso a la alimentación presentan un mayor nivel de bienestar. A medida que el ingreso aumenta, las familias tienen los recursos suficientes para satisfacer sus necesidades básicas, disponiendo de un excedente de ingresos que pueden utilizar para otros fines, como el ahorro o el consumo de lujo (Arango, 2005; Del Oro *et al.*, 2000).

Es importante destacar que, a raíz de los esfuerzos para poder medir la pobreza, se desarrollaron enfoques multidimensionales como: los métodos orientados por axiomas, la perspectiva de igualdad de oportunidades (Wall Street Oasis [WSO], 2024), el método de privación relativa, el enfoque de derechos, el método de medición integrado de la pobreza (MMIP), metodologías que consideran el ingreso y las necesidades básicas insatisfechas (NBI), el método de las capacidades, la línea de la pobreza (LP), entre otros (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social [CONEVAL], 2014a; CONEVAL, 2014b; CONEVAL, 2023).

Considerando que las líneas de pobreza son aquellas que separan a los pobres de los no pobres, el método LP es el que se usa con mayor frecuencia a nivel mundial pues utiliza el ingreso (renta) o el gasto de consumo como medidas del bienestar (Instituto Nacional de Estadística e Informática [INEI], 2000) para establecer un nivel de ingreso mínimo con el que se podrían satisfacer las necesidades físicas mínimas o más elementales de las personas, por lo que en este caso se consideran pobres aquellas que no alcanzan tal nivel de ingreso mínimo (Leandro, 2002). Al aplicar este enfoque en la práctica, destaca el problema de determinar tal nivel de necesidades mínimas, así como sus características y parámetros de medida.

Es preciso señalar que se consideran capacidades aquellas posibilidades que poseen los individuos para realizar funciones determinadas, tales como alimentarse, vestirse, convivir socialmente, etc. De este modo, el poseer capacidades para obtener ingresos o conseguir trabajo y educación adquiere mayor relevancia que el contar con dichos recursos (Nussbaum & Sen, 1996).

Cuando una persona o un grupo de personas se encuentran en situación de pobreza, es decir, cuando no cuentan con recursos para alimentación y para tener las condiciones de vida habituales o ampliamente fomentadas en la sociedad a la cual pertenecen (Atkinson *et al.*, 2002), es necesario realizar investigaciones sobre la pobreza, bajo un enfoque relativo, donde se consideran a los pobres como los individuos que tienen un ingreso insuficiente como una baja calidad de vida. Si lo visualizamos bajo dos ejes: un eje vertical que representa un índice de privación para evaluar la calidad de vida y un eje horizontal que expresa la cantidad de recursos económicos medidos por el ingreso (renta). De esta manera, en este esquema la calidad de vida incluye las condiciones materiales y sociales en las que se desarrollan las personas y participan en la vida social, económica y cultural de su sociedad (Gordon, 2010). Estas metodologías fueron utilizadas en escenarios de América Latina durante la década de los 90s para caracterizar la pobreza (Feres & Mancero, 2001), recibiendo críticas en torno al hecho de que agrega y pondera las dimensiones de pobreza en un solo índice, obteniendo resultados redundantes.

En el Informe sobre Desarrollo Humano de 2010 (Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo [PNUD], 2010), en sustitución del índice de pobreza humana (United Nations Development Programme [UNDP], 1997), se propuso el índice de pobreza multidimensional (IPM) porque cuenta con tres dimensiones equiponderadas: calidad de vida, salud y educación, las cuales se miden mediante 10 indicadores (Alkire & Santos, 2011).

A pesar de que el IPM ha presentado ventajas metodológicas por no incorporar el indicador de ingreso, este ha recibido bastantes críticas pues podría dar lugar a que el aumento de la pobreza se subestime en países con crisis económicas (Ravallion, 2011). Esto se debe a que, cuando la pobreza se mide solamente en términos monetarios, se podría correr el riesgo de interpretar erróneamente que hay personas que salen de la pobreza cuando la realidad es que existe una gran cantidad de población con carencias en aspectos del bienestar no monetarios.

Las medidas que se basan exclusivamente en el ingreso corriente apoyan la capacidad de consumo privado a través del mercado sin captar el acceso a bienes públicos como educación, salud, infraestructura, etc., lo cual deteriora la correlación entre ingreso y bienestar. Es decir, una persona puede tener los medios para contar con educación o agua potable, pero esos servicios podrían no estar disponibles en el mercado (Feres & Villatoro, 2012).

La gran cantidad de problemáticas en torno a la pobreza generan una gran variedad de enfoques para medirla, ya que el modo en el que se concibe la pobreza tiene consecuencias directas para lograr su superación (Kakwani & Silber, 2013). El establecimiento de los umbrales en cada dimensión y la forma en la que se identifica a los individuos en situación de pobreza tiene consecuencias en los niveles de marginación y vulnerabilidad en la sociedad, por lo que, al adoptar un enfoque particular de análisis de la pobreza, es necesario considerar los objetivos que cada sociedad se plantea a sí misma.

Actualmente, es crucial comprender el comportamiento de los factores que influyen en la pobreza en México. Basándonos en los datos obtenidos de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2020 y 2023 del INEGI para el estado de Guanajuato (INEGI, 2020; INEGI, 2023), podemos establecer estrategias para medir los índices de pobreza mediante escalas estadísticas (Black, 2020; Levin & Rubin, 2004) para obtener de esto un modelo matemático. Y con el uso de cálculo diferencial y los criterios de la primera y segunda derivada, se pueden encontrar máximos y mínimos en una función, así como los posibles puntos de inflexión que el modelo presente (Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Thomas, 2006). Así, estos indicadores ayudan a cumplir de manera específica los objetivos establecidos por las familias en el estado de Guanajuato.

Materiales y métodos

De acuerdo con los principios de Engel, una familia en situación de pobreza destina una alta proporción de sus ingresos a alimentos (Arango, 2005; Del Oro *et al.*, 2000). Portillo (2011) y Engel (1857) aseguran que, a medida que los ingresos de las personas aumentan, el incremento porcentual en el gasto en alimentos es mayor que el aumento porcentual en sus ingresos. Una familia deja de ser considerada pobre cuando esta elasticidad rebasa su punto de inflexión. Por lo tanto, el límite de la pobreza se define en el punto de la función donde la elasticidad ingreso de la demanda de alimentos es igual a 1 (Engel, 1857; Portillo, 2011).

La modificación principal en la curva de Engel consiste en utilizar una función cúbica (Barrientos & Arango, 2019; Chai & Stepanova, 2023; García, 2013; WSO, 2024) o de regresión (Del Oro *et al.*, 2000) en lugar de una función exponencial basada en los logaritmos de las variables involucradas en el modelo (Nicolini & Correa, 2019). La curva exponencial proporciona información sobre si la mayoría de la población estudiada es pobre o no, definida por el valor de la elasticidad del ingreso obtenido a través de la técnica de regresión (Black, 2020; Del Oro *et al.*, 2000; García, 2013; Levin & Rubin, 2004), ajustando los datos a un modelo con una sola concavidad (Larson & Edwards, 2022; Leithold, 1988; Thomas, 2006) y un valor promedio de elasticidad ingreso (Del Oro *et al.*, 2000).

La curva modificada parte del supuesto de que en la misma población coexisten tanto pobres como no pobres, con diferentes proporciones de ingresos destinados a la alimentación. Por lo tanto, se ajustan los datos a una función con dos concavidades que permitan identificar y separar ambos grupos (Portillo, 2011). A diferencia de la curva ordinaria, la función cúbica no solo permite determinar el límite entre pobres y no pobres (Carugati, 2008), sino también obtener el consumo autónomo, que es cuando los ingresos son iguales a 0 (Portillo, 2011; Portillo *et al.*, 2015).

Usando el método clásico sobre el uso de la ley de Engel, se utiliza una razón o relación llamada elasticidad entre el ingreso (I) y el gasto en alimentos (GA). Esa relación presenta tres situaciones:

La primera es cuando el ingreso es mayor que el gasto en alimentos (I/GA), obteniendo un resultado mayor a 1 y usando la expresión gráfica de las curvas de Engel (Figura 1a). Esta curva tiene una concavidad hacia arriba (Portillo *et al.*, 2015).

La segunda es cuando el ingreso es menor que el gasto en alimentos (I/GA), obteniendo un resultado menor a 1 y usando la expresión gráfica de las curvas de Engel (Figura 1b). Esta curva tiene una concavidad hacia abajo (Portillo *et al.*, 2015).

La tercera es cuando el ingreso es igual que el gasto en alimentos (I/GA), obteniendo un resultado igual a 1. Cuando el valor obtenido es 1, representa que una persona deja de ser pobre, es decir, representa el límite de la pobreza (Portillo *et al.*, 2015).

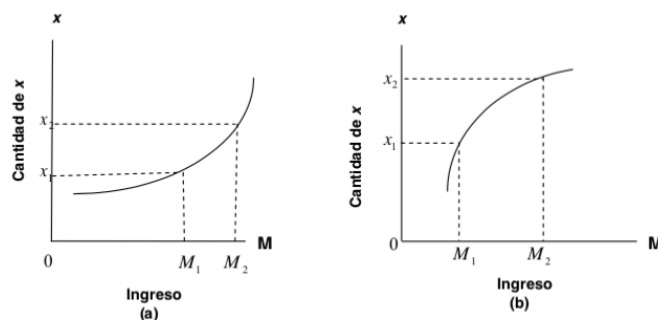


Figura 1. Concavidad de las curvas de Engel.

Fuente: Portillo (2011).

En una función cúbica, la elasticidad ingreso cambia de mayor que 1 a menor que 1 en el punto donde una recta desde el origen toca tangencialmente la función. Este punto de tangencia, proyectado sobre el eje del ingreso, delimita los ingresos de pobres y no pobres; y proyectado sobre el eje del gasto en alimentos, identifica el monto del gasto en este rubro para la población en el límite de la pobreza.

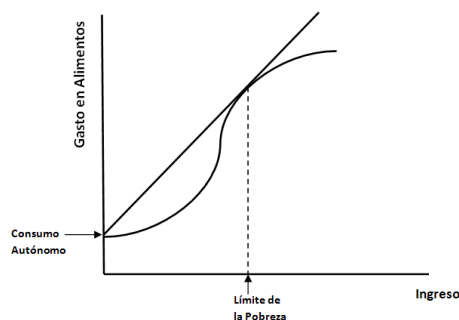


Figura 2. Curva de Engel modificada y límite de la pobreza.

Fuente: Portillo (2011).

Para el desarrollo de esta investigación se propone un método diferente. Al analizar la metodología de la ley de Engel, se observó que existía similitud con el método de la segunda derivada, ya que ambos métodos buscan un cambio de pendiente para encontrar un punto de inflexión (Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Thomas, 2006). Por ese motivo, se utilizó cálculo diferencial, específicamente el criterio de la segunda derivada, para encontrar el punto de inflexión de una función sin importar el orden de esta.

Ese método describe que encontrar el punto de inflexión sería el equivalente a encontrar la elasticidad entre ingreso y gasto en alimentos cuando esa relación sea igual a 1. Para usar el método de la segunda derivada y calcular el punto de inflexión, la segunda derivada de la función se iguala a 0, obteniendo así de forma directa el punto de inflexión o el umbral de pobreza. El rebasar o no este ingreso implica si dejan de ser pobres o no. (Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Thomas, 2006).

La descripción de ese método nos dice que, una vez obtenida la función (para este caso la ecuación cúbica de Engel), se debe de derivar dos veces, para obtener la segunda derivada [$f''(x)$ o y''], una vez obtenida la segunda derivada se iguala a 0 para obtener sus valores (Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Thomas, 2006):

Si la $f''(x) > 0$ para todo x en un intervalo, la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

Si la $f''(x) < 0$ para todo x en un intervalo, la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

Cuando un punto donde la gráfica de una función tiene recta tangente igual a cero y la concavidad cambia, se ha encontrado un punto de inflexión (Thomas, 2006), es decir, si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa, (Larson & Edwards, 2022) como se observa en la Figura 3.

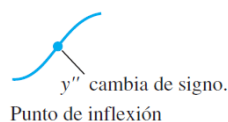


Figura 3. Gráfica del punto de inflexión.
Fuente: Thomas (2006).

Para esta investigación se utilizó una función cúbica. Al obtener la f'' solo queda una variable que al igualar a 0 y al despejar se obtiene el valor de x ; para este estudio x representa el ingreso.

Relacionando el criterio de la segunda derivada con la curva de Engel (y su función cúbica) (Engel, 1857; Engel, 2021), se obtienen tres posibles resultados, el inferior, el necesario y el de lujo (Carugati, 2008). La curva de Engel no parte del origen de la curva, es por eso que existe una cantidad de subsistencia llamado también "consumo autónomo". El consumo autónomo se refiere al nivel de consumo de alimentos cuando el ingreso es 0 y el consumidor recurre a ahorros, crédito o disminución de inventarios. La curva de Engel tradicional asume que, con un ingreso igual a 0, el consumo de alimentos también debería ser 0, lo cual difiere de la perspectiva macroeconómica que reconoce la existencia de gasto en alimentos. Por lo tanto, las familias de altos ingresos destinan una menor proporción de su incremento de ingresos a la compra de alimentos, lo que sugiere que sus necesidades alimenticias están mejor cubiertas, ubicándose en esta categoría de ingresos altos (Portillo *et al.*, 2015), como se observa en la Figura 1b.

Dado que en una misma localidad coexisten estratos de población con ingresos altos y bajos, la modificación de las curvas de Engel consiste en representar ambos estratos en una sola gráfica. Para ello, se utiliza una función cúbica que captura estas dos características en la misma curva, identificando el punto de inflexión donde la elasticidad de ingreso cambia (Larson & Edwards, 2022; Thomas, 2006). Para lograrlo, es necesario estimar la función típica de la curva de Engel, donde se utiliza un procedimiento de regresión que explica cómo varía el gasto en alimentos de las familias en relación con su ingreso. La expresión algebraica es: $G = f(I)$, donde G = Gasto anual en alimentos de las familias de la zona estudiada (en pesos mexicanos) e I = Ingreso anual de las familias del estado de Guanajuato (en pesos mexicanos).

La función generalmente empleada en la construcción de la curva de Engel es:

$$Y = AX^\beta \quad (1)$$

donde Y = Gasto en alimentos, A = Coeficiente constante, X = Ingreso total de los consumidores y β = Exponente que indica el cambio porcentual en el consumo de alimentos por cada uno por ciento de cambio en el ingreso, conocido como elasticidad ingreso del consumo de alimentos.

Para obtener los valores de A y β , se utiliza un proceso de regresión donde el logaritmo de Y es la variable dependiente y el logaritmo de X es la variable independiente. La concavidad de la función está determinada por el valor de β : si β es menor que 1, la concavidad refleja una disminución en el consumo de alimentos, con incrementos en el ingreso; si β es mayor que 1, indica un aumento en el consumo de alimentos, con incrementos en el ingreso.

El valor de β se obtiene directamente del coeficiente de regresión de la variable logaritmo de X , mientras que A se calcula con el antilogaritmo del término independiente generado en el proceso de regresión. Una característica de esta función es que Y es igual a 0 cuando X es igual a 0; es decir, la función parte del origen. La teoría de Engel considera solo una concavidad; la curva resultante de esta metodología proporciona información general del comportamiento de la población estudiada.

A diferencia del modelo original de Engel, los datos de ingresos y gastos en alimentos se ajustarán a una función cúbica con dos concavidades, captando tanto a los pobladores con elasticidad ingreso mayor que 1 como a aquellos con elasticidad menor que 1 (Carugati, 2008; Portillo *et al.*, 2015). Esto permite calcular el punto límite entre ambos grupos y su nivel de ingreso correspondiente.

Adicionalmente, esta función permite estimar el consumo autónomo, representado por el valor de la ordenada al origen. El modelo se estima utilizando los programas Excel® y SPSS, ya que la teoría microeconómica no especifica una forma funcional particular para las curvas de Engel. Los datos se ajustan a una función polinomial cúbica que refleja las dos concavidades de la curva de Engel (Portillo *et al.*, 2015), como sigue:

$$G = \beta_0 + \beta_1 I + \beta_2 I^2 + \beta_3 I^3 + E \quad (2)$$

donde G = Gasto anual en alimentos de los hogares, I = Ingreso anual, E = Errores de medición y β_0 , β_1 , β_2 y β_3 = Parámetros a estimar.

Una vez obtenida la función con dos concavidades, se puede determinar el ingreso, donde la elasticidad del ingreso en el consumo de alimentos pasa de una pendiente creciente a una pendiente decreciente. Ese punto tangencial donde se hace el cambio de pendiente se llama punto de inflexión, lo que indica el ingreso a partir del cual las familias destinan cada vez menores porcentajes del incremento en el ingreso para satisfacer sus necesidades básicas de alimentación (Olea *et al.*, 2019).

El nivel de ingreso que divide a los consumidores en pobres y no pobres se obtiene, gráficamente, a través de una recta que parte de la ordenada al origen y tangencia por encima la función. Este punto de tangencia proyectado sobre el eje de ingresos indica la separación entre los dos grupos. Algebraicamente, este punto límite se obtiene dividiendo las variables gasto en alimentos por ingreso " G/I ", derivando la función promedio resultante, igualando a 0 y despejando el valor de I .

Si la ecuación se divide entre I , se tiene:

$$G/I = \frac{\beta_1 I + \beta_2 I^2 + \beta_3 I^3}{I} \quad (3)$$

$$G/I = \beta_1 + \beta_2 I + \beta_3 I^2 \quad (4)$$

Derivando esta función respecto a I e igualando su derivada a 0 (Budnick, 2007; Haeussler *et al.*, 2003; Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Portillo *et al.*, 2015; Thomas, 2006) se obtiene:

$$\beta_2 + 2\beta_3 I = 0 \quad (5)$$

Despejando I , se obtiene el valor del ingreso límite de pobreza:

$$I = \frac{-\beta_2}{2\beta_3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \right) \quad (6)$$

En términos absolutos, el ingreso anual es igual a la mitad de la relación entre los coeficientes de regresión del término cuadrático y el término cúbico. El valor del consumo autónomo para las familias de las zonas estudiadas se obtiene de la función cúbica, representado por el valor de la ordenada al origen.

La información sobre ingresos y gastos anuales en alimentos que se procesaron en el modelo provino de la ENIGH 2023 (INEGI, 2023). Para el caso del ingreso anual, se considerará la información correspondiente al ingreso corriente total, ya que incluye tanto el ingreso monetario como el no monetario. Es importante considerar este último, ya que, aunque no constituye un valor monetario, sí representa un ingreso muchas veces sustancial, sobre todo en los estratos más pobres de la población. En relación con los gastos en alimentos, se considerará la información del grupo de alimentos y bebidas consumidas dentro del hogar que forma parte del gasto monetario de la encuesta.

Resultados

Para desarrollar esta investigación se empleó la información obtenida de la aplicación de cuestionarios de la ENIGH (INEGI, 2023) realizada por el INEGI. Además, se utilizó Minitab ® 18.1 (Minitab) en español, IBM ® SPSS ® Statistics versión 23 (SPSS) en español, así como Excel ®, que son herramientas de análisis de datos que permiten obtener la regresión de los datos, la varianza y procedimientos multivariados (Sánchez, 2023; Sánchez-Jiménez & Medina-Cuellar, 2023).

Las principales variables que se consideraron en este análisis son el ingreso anual de las familias y el gasto en alimentos. Para los datos sobre el ingreso anual, se utilizó la base de datos publicada por el INEGI (INEGI, 2023). Se tomó la última actualización del apartado de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH), estacional 2022, y de este índice se utilizó la base de datos denominada: conjunto_de_datos_concentradohogar_enigh_estacional_2022 (INEGI, 2023). Con esta información se obtuvieron datos sobre los ingresos y el gasto en alimentos, para el estado de Guanajuato y sus municipios.

Los datos recopilados se ponderaron utilizando el principio de Pareto (regla del 80/20), el cual sugiere que al concentrarse en el 20% de los factores, los gerentes pueden dedicarse a 80% del problema (Lind et al., 2008). Bajo este principio se discrimina el 20% de los ingresos más altos (INEGI, 2023), trabajando solamente con el 80% restante (Black, 2020; Levin & Rubin, 2004; Lind et al., 2008).

Con la información discriminada, se realizó en Minitab la gráfica de dispersión (Figura 4) con el fin de observar la distribución de los datos.

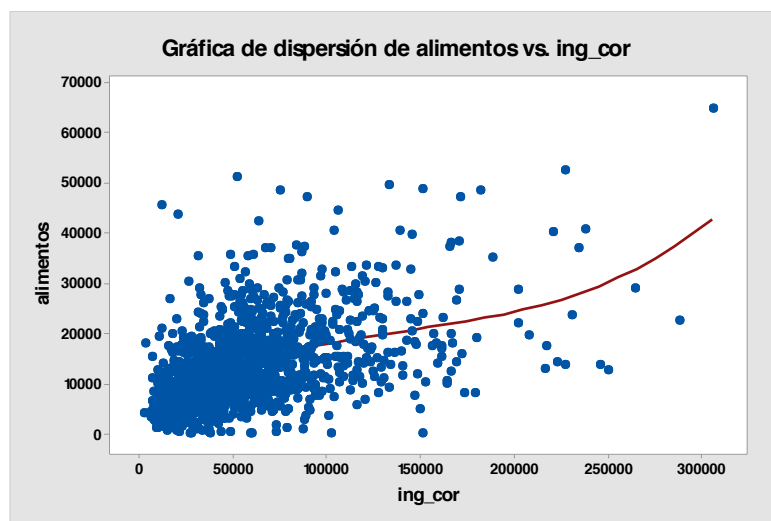


Figura 4. Gráfica de dispersión obtenida con Minitab: relación de ingresos y gasto en alimentos (INEGI, 2023).
Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4, al momento de realizar la gráfica de dispersión en SPSS, se da doble clic a la gráfica y aparece una ventana de la cual se obtiene la función cúbica y se ajustó el color de la gráfica de la función cúbica en color rojo. De esta manera se obtuvo la gráfica de dispersión y la gráfica de tendencia de la función cúbica (Figura 5).

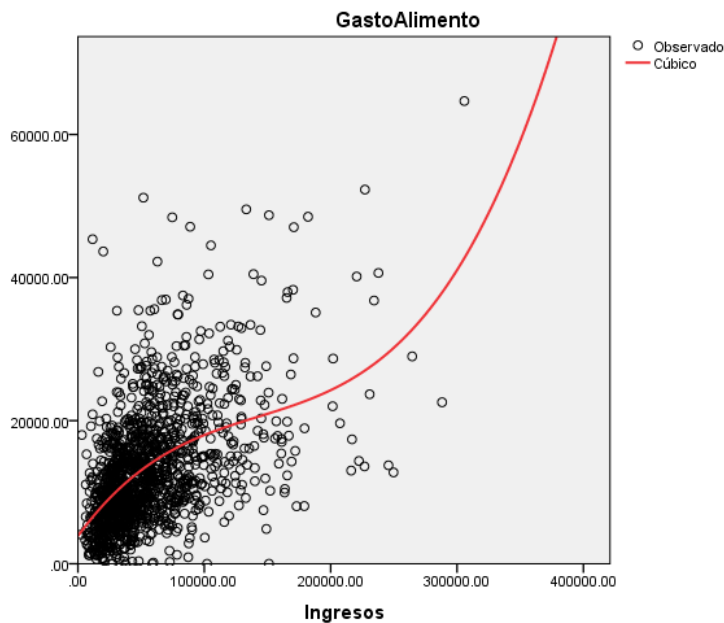


Figura 5. Gráfica de dispersión obtenida con SPSS: relación de ingresos y gasto en alimentos (INEGI, 2023).
Fuente: Elaboración propia.

Al corroborar que las gráficas de la Figura 4 y 5 son iguales, se encontró la función cúbica, como se muestra en la Figura 6.

The image shows the "Propiedades" (Properties) dialog box in SPSS, with the "Línea de referencia" (Reference Line) tab selected. The "Ecuación personalizada" (Custom Equation) section displays the following cubic equation:

$$y = 3879.795069480554 + 0.2413371069906131 * x + -1.308506445320933e-006 * x^2 + 3.056627940715726e-012 * x^3$$

Below the equation, it lists "Operadores válidos: +, -, *, /, (,), y **" (Valid operators: +, -, *, /, (,), and y **). At the bottom, there is a checkbox for "Adjuntar etiqueta a línea" (Attach label to line) which is currently unchecked. The "Aplicar" (Apply), "Cancelar" (Cancel), and "Ayuda" (Help) buttons are at the bottom right.

Figura 6. Ecuación cúbica obtenida con SPSS: relación de ingresos y gasto en alimentos (INEGI, 2023).
Fuente: Elaboración propia.

Se obtuvo información de la Tabla 1, de la cual se recaba los coeficientes de la función cúbica y el término independiente, así como el valor del coeficiente de correlación (R^2).

Tabla 1. Resumen de modelo y estimaciones de parámetro.

Ecuación	Resumen del modelo					Estimaciones de parámetro			
	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.	Constante	b1	b2	b3
Cúbico	0.259	164.989	3	1413	0.000	3879.795	0.241	-1.309E-6	3.057E-12

Nota. Variable dependiente: GastoAlimento; variable independiente: Ingresos.

Fuente: Elaboración propia.

Referente al coeficiente R^2 , se observó que el valor es de 0.259, considerado como un valor bajo, por lo que se compararon diversos autores (Godínez, 2010; González, 2020) y se concluyó que R^2 oscila entre los valores de 0.2 a 0.3. Según Godínez-Montoya *et al.* (2016), un valor bajo de R^2 sugiere que dentro de una misma población hay una gran variabilidad en el gasto destinado a alimentos, incluso entre familias con niveles de ingresos similares. Esto significa que hogares con el mismo nivel de ingresos pueden asignar proporciones diferentes de sus recursos al consumo de alimentos. Por lo tanto, el estadístico R^2 no refleja necesariamente el comportamiento promedio, ya que, para un mismo nivel de ingresos, existe una dispersión significativa en el gasto en alimentos. Esto se observa incluso en una misma localidad, donde familias con ingresos comparables pueden destinar cantidades distintas de su presupuesto a la compra de alimentos (Godínez-Montoya *et al.*, 2016).

Además, en la Tabla 1 se observó la relación entre el gasto en alimentos (variable dependiente) y los ingresos (variable independiente). Para esto se utilizó el análisis de regresión y estimación curvilínea, obteniendo así los coeficientes de la función cúbica, logrando así los coeficientes de la función cúbica, la cual se representa en la ecuación 7.

$$y = 3879.795 + 0.241x - 1.3085 \times 10^{-6}x^2 + 3.057 \times 10^{-12}x^3 \quad (7)$$

Una vez obtenida la función cúbica (ecuación 7), se transcribe a en GeoGebra (Geogebra, 2025) para conocer el alcance de la gráfica y si esta estaba dentro de los valores obtenidos en la ponderación de los datos (Figura 7).

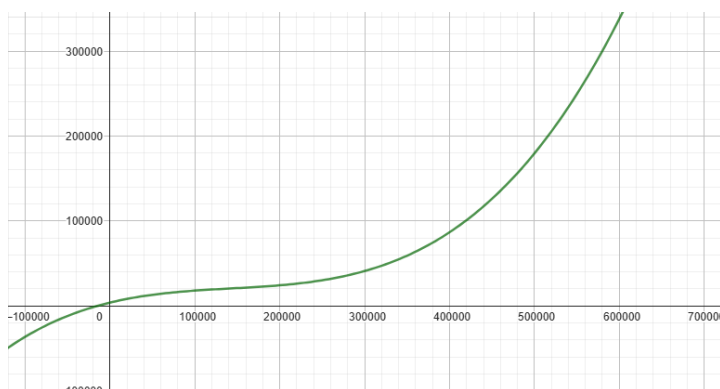


Figura 7. Representación gráfica de la ecuación 7.

Fuente: Elaboración propia en la herramienta Geogebra (Geogebra, 2025).

Comprobado lo anterior, se realizó el cambio de variables y ajuste de los parámetros que se definieron en la ecuación 2, quedando la expresión como se expresa en la ecuación 8:

$$G = 3,879.795 + 0.241I - 1.3085 \times 10^{-6}I^2 + 3.0576 \times 10^{-12}I^3 \quad (8)$$

Con la función cúbica estimada, que refleja las dos concavidades de la curva de Engel, se calculó el valor del ingreso a partir del cual las familias comienzan a satisfacer sus necesidades básicas de alimentos (límite de pobreza). Usando la ecuación 8 se obtuvo:

$$\frac{dG}{dI} = 0.241 - 2.617 \times 10^{-6}I + 9.171 \times 10^{-12}I^2 = G' \quad (9)$$

En esta ecuación se excluyó el valor de 3,879.795 de la función anterior, ya que en contextos de producción ese valor correspondería a la producción sin utilizar el insumo en estudio; además, cuando se obtiene la primera derivada, este valor se vuelve 0. En términos de consumo autónomo, esto implica que, incluso sin ingresos, las personas comen, probablemente porque recurren a préstamos, a empeños o al uso tarjetas de crédito, etcétera.

Una vez calculada la ecuación 9, se vuelve a derivar, para obtener la segunda derivada, la cual se igualará a 0 ($G''=0$), se obtiene:

$$\frac{dG'}{dI} = -2.617 \times 10^{-6} + 1.8342 \times 10^{-12}I = G'' \quad (10)$$

$$G'' = -2.617 \times 10^{-6} + 1.8342 \times 10^{-12}I = 0 \quad (11)$$

Finalmente, al despejar I de la ecuación 11, se encontró su valor, quedando de la siguiente manera:

$$I = \frac{2.617 \times 10^{-6}}{1.8342 \times 10^{-12}} = 142,678.00 \quad (12)$$

Con los datos expresados en miles de pesos mexicanos, el límite de pobreza en el estado de Guanajuato es:

$$I = \$142\,678.00 \text{ ANUAL}$$

$$I = \$11\,889.83 \text{ MENSUAL}$$

Además, la función cúbica estimada mostró que el valor del consumo autónomo fue de \$3879.795, lo que representa el gasto en alimentos de las familias, independientemente del aumento o disminución de su ingreso mensual.

Con el valor de I encontrado en la ecuación 11, y usando el criterio de la segunda derivada, se puede llegar al punto de inflexión donde la curva cúbica cambia de pendiente (Adams & Essex, 2021; Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Thomas, 2006); es decir, este punto es el que define la clase media, donde se deja de ser pobre.

Larson & Hostetler (2006) y Leithold (1988) declaran que hay que sustituir el valor encontrado de la segunda derivada y que debe ser sustituido en la función original (ecuación 8) para encontrar así el valor del gasto (G). Los autores dicen que, si el valor es diferente de 0, se tiene entonces un punto de inflexión, como en este caso. Por tanto, se sustituyó el valor de I en la ecuación 8 y se encontró el siguiente valor.

$$G(11,889.83) = 3,879.795 + 0.241(11,889.83) - 1.3085 \times 10^{-6}(11,889.83)^2 + 3.0576 \times 10^{-12}(11,889.83)^3 = 6,565.40 \quad (13)$$

Esto significa que, para el estado de Guanajuato, el punto de inflexión se encuentra cuando se obtienen ingresos mensuales de \$11 889.83, con un gasto mensual en alimentos de \$6565.40.

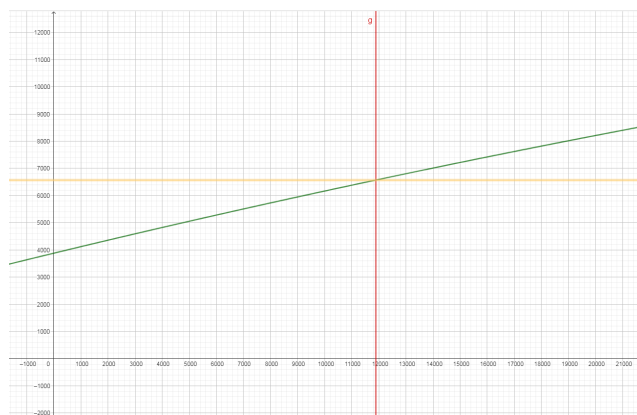


Figura 8. Representación gráfica del punto de inflexión.

Fuente: Elaboración propia en la herramienta Geogebra (Geogebra, 2025).

En la Figura 8 se observa el punto de inflexión donde la línea verde representa la función cúbica (ecuación 8), la línea roja representa el ingreso ($I = \$11\,889.83$) y la línea color amarillo representa el gasto en alimento ($G = \$6565.40$). Se observa que tanto el gasto en alimentos como el ingreso se intersecan con la ecuación cúbica, encontrando el punto de inflexión, lo que se interpreta de la siguiente manera: Para que las personas dejen de ser pobres, su ingreso mensual debe ser de al menos \$11 889.83 y el gasto en alimentos debe ser de por lo menos \$6565.40 mensuales.

Discusión

Es importante destacar que los resultados obtenidos en la investigación fueron generados con datos recopilados en el año 2022 para el estado de Guanajuato y publicados en el año 2023 (INEGI, 2023). Se utilizaron estos datos porque al momento de realizar la investigación eran los más recientes, por lo que los resultados obtenidos pueden actualizarse cuando el INEGI publique la nueva base de datos.

Cabe subrayar que son pocos los estudios que han utilizado este método. Por ejemplo, de las últimas investigaciones realizadas, resalta la investigación desarrollada por Olea *et al.* (2019), quienes usaron el método clásico de la ley de Egnel para encontrar la línea de pobreza en Guerrero en el 2019.

Con base en los resultados de esta investigación, se observó que las familias o personas que viven en el estado de Guanajuato y que ganan menos de \$11 889.83 al mes se encuentran por debajo del límite de pobreza, es decir, se sitúan en la primera parte de la curva. Esta sección tiene una pendiente ascendente (cóncava hacia arriba), indicando que el gasto en alimentos aumenta más que proporcionalmente con los cambios en el ingreso, demostrando que las familias de bajos ingresos asignan una alta proporción de sus ingresos a la compra de alimentos, incluso cuando sus ingresos son reducidos.

En contraparte, las familias con un ingreso superior a los \$11 889.83 rebasan el límite de pobreza estimado, ubicándose en la segunda porción de la curva de Engel modificada, caracterizada por una pendiente descendente. Esto implica que el gasto en alimentos aumenta en menor proporción con respecto a los incrementos en el ingreso. Es decir, el incremento en el gasto en alimentos es menos significativo en comparación con el aumento en los ingresos.

Las familias con mayores ingresos (ubicadas en esta parte de la gráfica) comienzan a satisfacer sus necesidades básicas de alimentación y pueden destinar una parte de sus ingresos a otras necesidades no alimenticias o al ahorro. Esto sugiere que las familias que destinan una menor proporción de sus ingresos al consumo de alimentos experimentan un mayor bienestar. En contraste, las familias o personas que carecen de un ingreso, es decir, igual a 0, tienen un consumo autónomo de \$3879.79 mensuales con el que deben subsistir, por lo que se infiere que para ello se hacen valer de ahorros, préstamos, créditos o disminución de activos.

Al utilizar el método de la segunda derivada y del punto de inflexión, adicional se encontró el ingreso mensual de \$11 889.83. Adicionalmente, se encontró el consumo en alimentos por mes, el cual fue de \$6565.40. Es decir, el umbral de la pobreza en Guanajuato se obtiene cuando las personas o familias tienen un ingreso mensual de \$11 889.83 y un gasto en alimentos de \$6565.40; el resto (\$5324.43) se utiliza para cubrir otros gastos, como: pago de renta, transporte, servicios de agua o luz, vestimenta, calzado o salud.

La importancia de utilizar el método de la segunda derivada se da cuando se obtiene la función cúbica para ser resuelta. Utilizando el método convencional se obtiene el límite que define el umbral de pobreza. El término independiente de la función cúbica representa el consumo autónomo, donde las personas necesitan comer aun sin tener ingresos, obligándolas a hacer uso de cualquier método para subsistir. Utilizando el método de la segunda derivada se obtiene el consumo autónomo de manera directa. Además, al realizar la segunda derivada, se obtiene el punto de inflexión, el cual representa el umbral de pobreza. Adicionalmente, el consumo en alimentos que debe existir se puede estimar en función del ingreso, lo más importante es que este valor puede fluctuar o variar conforme cambia el ingreso; dicho de otro modo, si cambian los parámetros y se calcula el nuevo umbral de pobreza, se encontrará otro gasto en alimentos que corresponderá al nuevo umbral. Este procedimiento no se había calculado, al menos en la literatura consultada.

Conclusiones

En esta investigación se lograron dos aportaciones importantes. La primera fue encontrar el límite de la pobreza para el estado de Guanajuato, la cual cumple con el objetivo de la investigación, pues establece el ingreso mensual que las personas deben tener para dejar de ser pobres. La segunda fue encontrar el valor correspondiente al gasto en alimentos. Con base en lo anterior, ahora se tienen un umbral nuevo, uno que se determina por el ingreso y otro por el gasto en alimentos (anteriormente solo se utilizaba el ingreso como referencia).

Esto se logró gracias a la implementación y adaptación de un método utilizado en cálculo diferencial llamado criterio de la segunda derivada (Larson & Edwards, 2022; Larson & Hostetler, 2006; Leithold, 1988; Thomas, 2006). En la revisión de la literatura no se encontró una aplicación directa de este método; aunque había ligeras variantes, ninguna utilizó un rigor matemático como se hizo en esta investigación. Con esta innovación se pudo calcular el gasto en alimentos y su correlación directa con el ingreso.

Se debe mencionar que una de las limitantes de esta investigación es que los valores calculados pueden variar dependiendo de la zona del estado de Guanajuato, ya que los alimentos podrían tener precios más altos en unas áreas que en otras.

Se recomienda que, una vez que el INEGI publique la nueva base de datos, se replique esta investigación para obtener un histórico de cómo se comporta el crecimiento o decrecimiento de los ingresos respecto al gasto en alimentos, con el fin de conocer si el umbral de pobreza sube o se mantiene y crear políticas públicas para garantizar que todos los guanajuatenses tengan una calidad digna de vida.

Esta investigación tiene un impacto en el estado, ya que demuestra un límite que divide a la población entre pobres y no pobres; es decir, revela de manera cruda y real el nivel de pobreza del estado. El presente estudio se puede replicar en otros municipios, estados o países, para determinar cuál es el umbral de pobreza en la zona deseada. El índice propuesto puede ser utilizado para crear políticas públicas enfocadas en sacar de la pobreza al sector de la población que lo necesita, creando las condiciones para que tengan un trabajo seguro, estabilidad económica y seguridad pública en el estado.

Al establecer el umbral de pobreza para el estado de Guanajuato, se obtiene una división entre pobreza y no pobreza. De esta manera, se puede concluir que una familia que tiene carencias en la alimentación, difícilmente tendrá recursos para vestir, cuidar su salud o tener una vivienda digna, aspectos que pueden causar problemas sociales que impactan de manera directa o indirecta en el estado.

Conflictos de interés

Los autores declaramos que no existe ningún conflicto de interés en esta investigación.

Referencias

- Adams, R., & Essex, C. (2021). *Calculus: a complete course* (10a. ed.). Pearson.
- Alkire, S., & Foster, J. (2008). Counting and multidimensional poverty measurement. *OPHI Working Paper Series, Oxford Poverty & Human Development Initiative (OPHI)*, (7). <https://ophi.org.uk/publication/WP-07>
- Alkire, S., & Santos, M. E. (2011). Acute multidimensional poverty: a new index for developing countries. *Proceedings of the German Development Economics Conference*, Berlin, (3). <https://www.econstor.eu/handle/10419/48297>
- Arango, J. C. (2005). *Desigualdad y exclusión en Colombia (1990-2000): los problemas nutricionales desde una aproximación del enfoque de las capacidades humanas* [Tesis de Maestría]. Universidad de Antioquia, Instituto de Estudios Políticos. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/11546/1/Arango_2005_DesigualdadAlimentaria.pdf
- Atkinson, T., Cantillon, B., Marlier, E., & Nolan, B. (2002). *Social indicators, the EU and social inclusion*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/0199253498.001.0001>
- Barrientos, J., & Arango, E. (2019). La curva de Engel de los hogares en Medellín, Colombia 2012-2015. *Apuntes del CENES*, 38(68), 185 - 212. <https://doi.org/10.19053/01203053.v38.n68.2019.8479>
- Black, K. (2020). *Business statistics for contemporary decision making* (10a ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Budnick, F. S. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales* (4a ed.). McGraw Hill.
- Carugati, M. (2008). *Estimación de curvas de Engel en Argentina* [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional de Mar del Plata. https://nulan.mdp.edu.ar/id/eprint/636/1/carugati_m.pdf
- Chai, A., & Stepanova, E. (2023). Chapter 50: Engel curves, spending diversity and welfare measurement. En J. Silber (ed), *Research handbook on measuring poverty and deprivation* (pp. 544-552). Edward Elgar Publishing. <https://doi.org/10.4337/9781800883451.00067>

- Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (CONEVAL). (2014a). *Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social*.
https://www.coneval.org.mx/Medicion/MP/Paginas/Pobreza_2014.aspx
- Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (CONEVAL). (2014b). Medición multidimensional de la pobreza en México. *El Trimestre Económico*, 81(321), 5-42.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=31340979001>
- Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (CONEVAL). (2023). *Documento de análisis sobre la medición multidimensional de la pobreza, 2022*.
https://www.coneval.org.mx/Medicion/MP/Documents/MMP_2022/Documento_de_analisis_sobre_la_medicion_multidimensional_de_la_pobreza_2022.pdf
- Cortés, F., Henández, D., Hernández, E., Székely, M., & Vera, H. (2003). Evolución y características de la pobreza en México en la última década del siglo XX. *Economía Mexicana*, 12(2), 295-325.
<https://www.redalyc.org/pdf/323/32312205.pdf>
- Del Oro, C. P., Rodríguez, M., & Riobóo, J. M. (2000). Estimación de curvas de Engel: un enfoque no paramétrico y su aplicación al caso gallego. *Estudios de Economía Aplicada*, 16(3), 37-61.
<https://www.redalyc.org/pdf/301/30116307.pdf>
- Engel, E. (1857). Die Produktions-und Consumptions verhältnisse des Königreschs Sachsen [Reeditado en 1895]. *Bulletin de Institut International de Statistique*, 9, 1-54.
- Engel, E. (2021). Die vorherrschenden Gewerbszweige in den Gerichtsämtern mit Beziehung auf die Productions- und Consumptionsverhältnisse des Königreichs Sachsen. *WISTA – Wirtschaft und Statistik*, 73(2), 126-136.
<https://www.econstor.eu/bitstream/10419/233572/1/wista-2021-2-126-136.pdf>
- Feres, J. C., & Mancero, X. (2001). *Enfoques para la medición de la pobreza: breve revisión de la literatura*. Naciones Unidas, División de Estadística y Proyecciones Económicas. <https://hdl.handle.net/11362/4740>
- Feres, J. C., & Villatoro, P. (2012). La viabilidad de erradicar la pobreza: Un examen conceptual y metodológico. *Serie Estudios Estadísticos y Prospectivos*, (78), 1-36.
https://sociedadpoliticaspublicas.cl/archivos/BLOQUEM/Pobreza/La_Vialidad_de_breza.pdf
- García, R. (2013). Sobre las curvas de Engel. Una breve revisión de su evolución histórica. *Ensayos de Economía*, (42), 175-188. <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/6510>
- Geogebra. (27 de febrero de 2025). *Geogebra clásico*. Geogebra.org. <https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Godínez, L. (2010). *Determinación del nivel de ingreso de las familias que identifica el límite de la pobreza* [Tesis de Doctorado]. Universidad Autónoma de Chapingo.
<https://repositorio.chapingo.edu.mx/server/api/core/bitstreams/e02a4560-b9ee-455a-85b4-59fa65bd6ddc/content>
- Godínez-Montoya, L., Figueroa-Hernández, E., & Pérez-Soto, F. (2016). Medición de la pobreza urbana en México. *Revista del Desarrollo Urbano y Sustentable*, 2(5), 25-39.
https://www.ecorfan.org/bolivia/researchjournals/Desarrollo_Urbano_y_Sustentable/vol2num5/Revista_del_Development_Urbano_y_Sustentable_V2_N5_3.pdf
- González, A. V. (2020). *Estimación de curvas de Engel para el gasto de los hogares uruguayos. Una comparación de las encuestas de gasto de los hogares entre 2005/06 y 2016/17* [Tesis]. Universidad de la Republica Uruguay.
<https://hdl.handle.net/20.500.12008/34055>
- Gordon, D. (2010). Metodología de medición multidimensional de la pobreza para México a partir del concepto de privación relativa. En J. Boltvinik, S. R. Chakravarty, J. E. Foster, D. Gordon, R. H. Cid, H. S. de la Rosa, & M. Mora (eds.), *Medición multidimensional de la pobreza en México* (pp. 401-498). El Colegio de México y el Consejo de Evaluación de la Política de Desarrollo Social.
<https://research-information.bris.ac.uk/en/publications/metodologia-de-medicin%C3%B3n-multidimensional-de-la-pobreza-para-m%C3%A9xico>
- Haeussler, E. F., Paul, R. S., & Wood, R. J. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (12a ed.). Pearson Educación. <https://archive.org/details/matematicasparaa0000jrha>
- Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI). (2000). *Metodologías estadísticas. Metodología para la Medición de la pobreza en el Perú*. <https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/metodologias/pobreza01.pdf>

- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2020). *Información demográfica y social. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH)* [Nueva serie, 2020].
<https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/nc/2020/>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2023). *Información Demográfica y Social. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH)* [Estacional, 2022].
https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/est/2022/#datos_abiertos
- Kakwani, N., & Silber, J. (2013). *The many dimensions of poverty*. Springer. <https://doi.org/10.1057/9780230592407>
- Larson, R. E., & Hostetler, R. P. (2006). *Cálculo y geometría analítica* (8a ed.). McGraw-Hill.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2022). *Calculus* (11a ed.). Cengage Learning.
- Leandro, G. (2002). *Pobreza: conceptos y medición*. Auladeeconomía.com.
<https://www.auladeeconomia.com/articulos18.htm>
- Leithold, L. (1988). *El cálculo* (7a ed.). Oxford University Press.
- Levin, R., & Rubin, D. (2004). *Estadística para administración y economía* (7a ed.). Pearson Education.
- Lind, D., Marchal, W., & Wathen, S. A. (2008). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. McGraw Hill - Interamericana.
- Nicolini, E., & Correa, M. (2019). Patrones de consumo de las familias de trabajadores en Buenos Aires, Argentina, entre 1907 y 1933. *Revista Uruguaya de Historia Económica*, 16, 10-25.
<https://hdl.handle.net/10016/36195>
- Nussbaum, M., & Sen, A. (1996). *La calidad de vida*. Fondo de Cultura Económica.
- Olea, M. C., Portillo, M., & Reyes, A. (2019). Identificación del límite de pobreza en el Estado de Guerrero. *Revista Mexicana de Economía Agrícola y de los Recursos Naturales*, 12(1), 93-112.
<https://dicea.chapingo.mx/wp-content/uploads/2019/07/ENERO-JUNIO-2019.pdf>
- Portillo, M. (2011). La función cúbica, como instrumento de estudios de la pobreza. *Revista Mexicana de Economía Agrícola y de los Recursos Naturales*, 4.
- Portillo, M., Pérez, F., Figueroa, E., Godínez, L., Pérez, M. T., & Barrios, G. (2015). La función de producción cúbica, su aplicación en la agricultura. *Revista Mexicana de Agronegocios*, 37, 11-24.
<https://doi.org/10.22004/AG.ECON.226145>
- Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD). (2010). *Informe sobre desarrollo humano 2010*. PNUD.
<https://www.undp.org/es/venezuela/publicaciones/informe-de-desarrollo-humano-2010?form=MGOAV3>
- Ravallion, M. (2011). *On multidimensional indices of poverty*. The World Bank.
- Sánchez, M. A. (2023). *Determinar los factores que influyen en el cierre de las empresas en el Estado de Guanajuato utilizando Análisis Factorial* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Celaya.
https://udecedu-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/biblioteca_udec_edu_mx/EaKCRIGog29NshHpGIMByA4BjZAftTei0xY9NcFk6hLtqQ?xsdata=MDV8MDJ8bWFzYW5jaGV6QHVndG8ubXh8NDg1MDExMGZkYTlyNDhIMTcxZmMwOGRkNWZmNDA4Nzd8MTMyYjk4NzFIMDI1NGVhZGEzNGQ3YmQ1ZTdhMzgzYjR8MHwwfDYzO
- Sánchez-Jiménez, M. A., & Medina-Cuéllar, S. E. (2023). Factores económicos que explican la bancarrota de empresas. *Investigación Administrativa*, 52(131).
https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2448-76782023000100006&script=sci_arttext
- Thomas, G. B. (2006). *Cálculo. Una variable* (11a ed.). Pearson Education.
- United Nations Development Programme (UNDP). (1997). *Human Development Report 1997*.
<https://hdr.undp.org/content/human-development-report-1997?form=MGOAV3>
- Wall Street Oasis (WSO). (18 de Diciembre de 2024). *What Is Engel's Law?*. Wallstreetoasis.com.
<https://www.wallstreetoasis.com/resources/skills/economics/engels-law>